....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 11

Abgabe am 7.1.2020 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $L = \{\sim\}$ und sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, bei der $\sim$ eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist, und so dass jede Äquivalenzklasse unendlich ist. Ist $X \subset M$, so schreiben wir $X/\sim$ für die Menge der Äquivalenzklassen, die nicht disjunkt zu X sind.

Sie dürfen verwenden, dass $\mathcal{M}$ Quantorenelimination besitzt.

Zeigen Sie: Für $A, B, C \subset M$ gilt: $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_C B$ genau dann, wenn sowohl $A \cap B \subset C$ als auch $(A/\sim) \cap (B/\sim) \subset C/\sim$ gilt.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie mit Imaginärenelimination, seien $C \subset B \subset M$ klein, und sei $p \in S_{\underline{x}}(C)$. Zeigen Sie: Alle nicht-gabelnden Erweiterungen von p auf B sind zueinander über C konjugiert, d. h. sind $q_1, q_2 \in S_{\underline{x}}(B)$ zwei nicht-gabelnde Erweiterungen von p, so existiert ein $\alpha \in \mathrm{Aut}_C(\mathcal{M})$, so dass $\alpha_*(q_1) = q_2$ ist.

Aufgabe 3 (2+1+1+2 Punkte):

Sei K ein unendlicher Körper und sei $\mathcal{M}$ ein Monster-K-Vektorraum, in der Sprache $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$.

(a) Beschreiben Sie mit Mitteln der linearen Algebra, unter welchen Bedingungen für $A, B, C \subset M$ gilt: $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_C B$.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für Mengen $A, B, C_1, C_2 \subset M$ mit $C_1 \subset C_2$, so dass $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{C_1} B$ aber nicht $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{C_2} B$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}$ in $\mathcal{M}$ eine bessere Version von Eindeutigkeit/Beschränktheit (Satz 6.9.7 (b), (c)) erfüllt: Für beliebige Tupel $\underline{a}$ und beliebige $B, C \subset M$ besitzt $\mathrm{tp}(\underline{a}/C)$ genau eine nicht-gabelnde Fortsetzung auf $B \cup C$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}$ in $\mathcal{M}$ die folgende Variante vom lokalen Charakter (Satz 6.9.7 (g)) erfüllt: Ist $A \subset M$ endlich und $B \subset M$ beliebig, so existiert eine endliche Teilmenge $B_0 \subset B$, so dass $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}_{B_0} B$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie mit Imaginärenelimination, sei $C \subset M$ klein und seien $\underline{a}, \underline{a}' \in M^n$ mit $\mathrm{tp}(\underline{a}/\operatorname{acl}(C)) = \mathrm{tp}(\underline{a}'/\operatorname{acl}(C))$ und $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|} \underline{a}'$. Zeigen Sie, dass der Typ $\mathrm{tp}(\underline{a}/C \cup \{\underline{a}'\})$ genau eine nicht-gabelnde Erweiterung auf jede Obermenge von $C \cup \{\underline{a}'\}$ besitzt.

Hinweis: Für jede Formel $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ besitzt die nicht-gabelnde Erweiterung eine δ-Definition über $\operatorname{acl}(C)$. Zeigen Sie, dass diese Definition bereits über $C \cup \{\underline{a}'\}$ ist, indem Sie $\mathrm{Aut}_{C \cup \{\underline{a}'\}}(\mathcal{M})$ auf ihr operieren lassen. (Was macht diese Automorphismengruppe mit den verschiedenen Erweiterungen von $\mathrm{tp}_\delta(\underline{a}/C)$ auf $\operatorname{acl}(C)$?)

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Mod_W19/