1	2	3	Σ

....
Name

Modelltheorie I – Blatt 12

Abgabe am 14.1.2020 in der Vorlesung

....
Matr-Nr. Gruppe

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie, dass Satz 6.9.7 (a) (Existenz) bereits aus (d), (e), (f) und „Existenz für einzelne Elemente a" (d. h.: für alle kleinen $C \subset B \subset M$ und alle $a \in M$ besitzt $\operatorname{tp}(a/C)$ eine nicht-gabelnde Fortsetzung auf B) folgt.

Aufgabe 2 (2+2+2+2+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell, in dem acl die Austauscheigenschaft besitzt (Definition 5.3.5); wir verwenden im Folgenden die Definition 5.3.10 und 5.3.15.

Seien $A, B, C \subset M$ klein. Wir definieren $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C^{\mathrm{acl}} B :\iff \dim_{B\cup C}(\operatorname{acl}(A_0 \cup B \cup C)) = \dim_C(\operatorname{acl}(A_0 \cup C))$.

Entsprechend sagen wir, für $C \subset B \subset M$, $p \in S_{\underline{x}}(C)$ und $q \in S_{\underline{x}}(B)$ mit $p \subset q$, dass q eine nicht-acl-gablende Erweiterung von p ist, wenn für Realisierungen $\underline{a} \models q$ gilt: $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_C^{\mathrm{acl}} B$.

Wir wollen prüfen, welche Teile von Satz 6.9.7 auch für $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\mathrm{acl}}$ und acl-gabeln gelten. (d) wurde bereits in der Vorlesung gezeigt, und (f) und (h) (i)+(ii) sind trivial. Bleibt also folgendes:

(a) Zeigen Sie, dass Existenz gilt.
Hinweis: Mit Aufgabe 1 können Sie sich das erleichtern.

(b) Zeigen Sie, dass weder Eindeutigkeit noch Beschränktheit gelten müssen: Sie können z. B. in einer geeigneten dichten linearen Ordnung ein Element a und eine Menge B angeben, so dass $\operatorname{tp}(a/\emptyset)$ viele nicht-gabelnde Fortsetzungen auf B hat.

(c) Zeigen Sie die Äquivalenz (b) ⇔ (c) aus Beispiel 6.9.11 um Symmetrie zu erhalten.

(d) Zeigen Sie, dass lokaler Charakter gilt.

(e) Zeigen Sie, dass (h) (iii) gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $\operatorname{Th}(\mathcal{M})$ stabil und seien $a_1, \ldots, a_n \in M$ Elemente, so dass für $i = 2, \ldots, n$ gilt: $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_\emptyset \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$. Zeigen Sie, dass dann bereits für $i = 1, \ldots, n$ gilt: $a_i \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_\emptyset \{a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n\}$.

Anmerkung: Im Wesentlichen sollten die Resultate aus Satz 6.9.7 reichen, um dies zu zeigen.

(Um eine Idee zu bekommen, hilft es, zunächst im Fall $n = 3$ auszuprobieren, was man aus Symmetrie, Monotonie und Transitivität alles herleiten kann.)