....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 13

Abgabe am 21.1.2020 in der Vorlesung

1	2	3	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie. Seien $M_0 \subset B \subset M$ klein, wobei $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ ist und sei $p \in S_{\underline{x}}(M_0)$. Wir wollen eine weitere Charakterisierung dafür angeben, ob eine Fortsetzung $q \in S_{\underline{x}}(B)$ die nicht-gabelnde Fortsetzung von p auf B ist. Wir nennen q einen „Erben" von p, wenn für jede Formel $\delta(\underline{x}, \underline{b}) \in q$ (mit $\underline{b} \in B^m$) ein $\underline{c} \in M_0^m$ existiert, so dass $\delta(\underline{x}, \underline{c}) \in p$ ist.

Zeigen Sie dazu:

(a) Ist q ist die nicht-gabelnde Erweiterung von p, so ist q auch ein Erbe von p.
Hinweis: Betrachten Sie die δ-Definition von $q|_\delta$.

(b) Ist $q' \in S_{\underline{x}}(B)$ ein Erbe von p, so ist q' die nicht-gabelnde Erweiterung von p.
Hinweis: Sei $\phi(\underline{y})$ die δ-Definition von $p|_\delta$. Wenn $\delta(\underline{x}, \underline{b}) \in q'$ liegt aber $\phi(\underline{b})$ nicht gilt, kann man mit $\psi(\underline{x}, \underline{y}) := \delta(\underline{x}, \underline{y}) \wedge \neg\phi(\underline{y})$ zeigen, dass q' kein Erbe von p ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte):

Sei $L = \{\sim_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ und sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, so dass jedes $\sim_i$ eine Äquivalenzrelation mit unendlich vielen Äquivalenzklassen ist.

(a) Wir nehmen außerdem an, dass jede Äquivalenzklasse von $\sim_i$ eine Vereinigung von unendlich vielen Äquivalenzklassen von $\sim_{i+1}$ ist.
Wir wollen prüfen, dass beim „lokalen Charakter" aus Satz 6.9.7 nicht angenommen werden kann, dass B_0 endlich ist. Geben Sie dazu einen Typ $p \in S_x(M)$ an, so dass für jede endliche Teilmenge $B_0 \subset M$ gilt: p ist gabelnde Erweiterung von $p|_{B_0}$.

(b) Jetzt nehmen wir (umgekehrt) an, dass jede Äquivalenzklasse von $\sim_{i+1}$ eine Vereinigung von unendlich vielen Äquivalenzklassen von $\sim_i$ ist.
Zeigen Sie, dass in diesem Fall eine besonders starke Version des lokalen Charakters gilt: für beliebige $B \subset M$ und $p \in S_x(B)$ (wobei x eine einzelne Variable ist) existiert eine ein-elementige Teilmenge $B_0 \subset B$, so dass p eine nicht-gabelnde Erweiterung von $p|_{B_0}$ ist.

Sie dürfen bei beiden Teilaufgaben annehmen, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ stabil ist und Quantoren-Elimination besitzt.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie. Seien $B \subset M$ und $p \in S_{\underline{x}}(B)$ gegeben. Eine „Fortsetzungskette" von p sei eine Folge von kleinen Mengen $B_i \subset M$ und von Typen $p_i \in S_{\underline{x}}(B_i)$, mit $B_0 = B$, $p_0 = p$ und so dass $B_i \subset B_{i+1}$ und $p_i \subset p_{i+1}$ gilt für $i \in \mathbb{N}$. Die „Gabelzahl" einer Fortsetzungskette ist die Anzahl der $n \in \mathbb{N}$, so dass p_{n+1} eine gabelnde Fortsetzung von p_n ist.

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ total transzendent, so ist die Gabelzahl jeder Fortsetzungskette von p endlich.
Hinweis: Benutzen Sie die Charakterisierung von Gabeln in total transzendenten Theorien.

(b) Zeigen Sie: Ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ streng minimal, so gibt es für jeden Typ p ein $N \in \mathbb{N}$, so dass jede Fortsetzungskette von p maximal Gabelzahl N hat. Wovon hängt N überhaupt ab?

(c) Wir wollen prüfen, dass in (a) ohne die Bedingung „total transzendent" falsch wäre: Seien dazu L und $\mathcal{M}$ wie in Aufgabe 2 (a). Geben Sie Mengen $B_i \subset M$ und $a \in M$ an, so dass $\mathrm{tp}(a/B_{i+1})$ eine gabelnde Fortsetzung von $\mathrm{tp}(a/B_i)$ ist, für alle i.

(d) Wir wollen prüfen, dass (b) ohne die Bedingung „streng minimal" falsch wäre: Seien dazu L und $\mathcal{M}$ wie in Aufgabe 2 (b). (Anmerkung: In diesem Fall ist $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ total transzendent; das brauchen Sie nicht zu zeigen.)
Geben Sie einen Typ p an und für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine Fortsetzungskette von p mit Gabelzahl $\geq N$.