1	2	3	4	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 2

Abgabe am 22.10.2019 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (6 Punkte):

(a) Sei $T = \mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <)$. Geben Sie ein Modell von T an, das nicht stark $\aleph_0$-homogen ist.

(b) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, <)$ ist stark $\aleph_0$-homogen.

(c) Zeigen Sie: $(\mathbb{R}, <)$ ist nicht stark $\aleph_1$-homogen.
Hinweis: Es hilft, zunächst einen Typ über einer abzählbaren Teilmenge von $\mathbb{R}$ zu finden, der in $\mathbb{R}$ nicht realisiert ist.

Aufgabe 2 (2+3 Punkte):

Sei κ eine unendliche Kardinalzahl.

Eine Struktur $\mathcal{M}$ heißt κ-universell, wenn sich jede elementar äquivalente Struktur $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ der Kardinalität $|\mathcal{M}'| < \kappa$ elementar in $\mathcal{M}$ einbetten lässt.

(a) Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M}$ κ-saturiert, so ist $\mathcal{M}$ κ^+-universell.

(b) Sei nun $\mathcal{M}$ speziell, mit $|\mathcal{M}| = \kappa$.
Aus (a) und Lemma 6.1.13 folgt, dass $\mathcal{M}$ $\mathrm{cf}(\kappa)^+$-universell ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ sogar κ^+-universell ist.
Hinweis: Gehen Sie wie im Beweis von Satz 6.1.12 vor.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell, sei $A \subset M$ klein und seien $\Sigma_1(\underline{x})$ und $\Sigma_2(\underline{x})$ partielle Typen über A. Wir schreiben $\Sigma_i(\mathcal{M})$ für die Menge der der $\underline{a} \in M^n$, die $\Sigma_i(\underline{x})$ realisieren.

Zeigen Sie: $\Sigma_1(\underline{x}) \models \Sigma_2(\underline{x})$ gilt genau dann, wenn $\Sigma_1(\mathcal{M}) \subset \Sigma_2(\mathcal{M})$ ist.

(Zu „$\Sigma_1(\underline{x}) \models \Sigma_2(\underline{x})$“: siehe Definition 5.2.1)

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell, seien $A \subset B \subset M$ klein, und sei $\Sigma(\underline{x})$ ein partieller n-Typ über B. Wir nehmen an, dass die Menge $\Sigma(\mathcal{M}) \subset M^n$ der Realisierungen von $\Sigma(\underline{x})$ invariant unter $\mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$ ist, d. h. dass $\alpha(\Sigma(\mathcal{M})) = \Sigma(\mathcal{M})$ ist für alle $\alpha \in \mathrm{Aut}_A(\mathcal{M})$.

Zeigen Sie, dass dann bereits ein partieller Typ über A existiert, der zu $\Sigma(\underline{x})$ äquivalent (siehe Def. 5.2.1) ist.

Hinweis: Verwenden Sie Ideen aus dem Beweis von Satz 6.1.15 und zeigen Sie als Zwischenschritte folgendes:

- Zu jedem $\underline{b} \in \Sigma(\mathcal{M})$ und jedem $\underline{c} \in M^n \setminus \Sigma(\mathcal{M})$ existiert eine $L(A)$-Formel $\phi(\underline{x})$ mit $\mathcal{M} \models \phi(\underline{b})$ und $\mathcal{M} \models \neg\phi(\underline{c})$.
- Zu jedem $\underline{c} \in M^n \setminus \Sigma(\mathcal{M})$ existiert eine $L(A)$-Formel $\psi(\underline{x})$ mit $\Sigma(\mathcal{M}) \subset \psi(\mathcal{M})$ und $\mathcal{M} \models \neg\phi(\underline{c})$.

(Aufgabe 3 ist auch nützlich.)