....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 3

Abgabe am 29.10.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Blatt sei L eine Sprache (evtl. mehrsortig), $\mathcal{M}$ eine unendliche L-Struktur und $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Aufgabe 1 (1+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Zu jeder Menge $A \subset M^{\mathrm{eq}}$ existiert eine Menge $\tilde{A} \subset M$ mit folgenden beiden Eigenschaften:
- Jede $L^{\mathrm{eq}}(A)$-definierbare Teilmenge von M^{eq} is bereits $L^{\mathrm{eq}}(\tilde{A})$-definierbar
- Ist A unendlich, so ist $|\tilde{A}| = |A|$; ist A endlich, so ist $\tilde{A}$ auch endlich.

(b) Geben Sie ein Beispiel an für eine Struktur $\mathcal{M}$ und eine Menge $A \subset M^{\mathrm{eq}}$, so dass keine Menge $\tilde{A} \subset M$ mit der folgenden Eigenschaft existiert:
- Eine Teilmenge von M ist $L^{\mathrm{eq}}(A)$-definierbar genau dann, wenn sie $L^{\mathrm{eq}}(\tilde{A})$-definierbar ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $S_{\sim}^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}} = (\prod_i S_i^{\mathcal{M}})/{\sim}$ eine Sorte von $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$. Zeigen Sie: Eine Teilmenge $X \subset S_{\sim}^{\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}}$ ist L^{eq}-definierbar genau dann, wenn das Urbild $\pi_{\sim}^{-1}(X) \subset \prod_i S_i^{\mathcal{M}}$ L-definierbar ist.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

Zeigen Sie: Jeder Automorphismus von $\mathcal{M}$ lässt sich auf eindeutige Weise zu einem Automorphismus von $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ fortsetzen.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass Sprachen mit endlich vielen Sorten genauso gut durch einsortige Sprachen ersetzt werden könnten. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass L genau zwei Sorten S_1 und S_2 hat und weder Konstantensymbole noch Funktionssymbole enthält.

Wir definieren dararaus eine 1-sortige Sprache $\tilde{L}$ wie folgt:

- Für jedes Relationssymbol $R \subset S_1^{n_1} \times S_2^{n_2}$ von L führen wir ein $(n_1 + n_2)$-stelliges Relationssymbol $\tilde{R}$ in $\tilde{L}$ ein.
- Außerdem enthält $\tilde{L}$ einstellige Relationssymbole $\tilde{P}_1$ und $\tilde{P}_2$.

Aus der L-Struktur $\mathcal{M}$ konstruieren wir eine $\tilde{L}$-Struktur $\tilde{\mathcal{M}}$ wie folgt:

- $\tilde{M} := M$ $(= S_1^{\mathcal{M}} \cup S_2^{\mathcal{M}})$:
- $\tilde{R}^{\tilde{\mathcal{M}}} := R^{\mathcal{M}}$ $(\subset M^{n_1+n_2})$ für jedes Relationssymbol $R \in L$ wie oben.
- $\tilde{P}_i^{\tilde{\mathcal{M}}} := S_i^{\mathcal{M}}$ für $i = 1, 2$.

Zeigen Sie, dass für Mengen $X \subset (S_1^{\mathcal{M}})^{m_1} \times (S_2^{\mathcal{M}})^{m_2}$ gilt: X ist in $\mathcal{M}$ L-definierbar genau dann, wenn X in $\tilde{\mathcal{M}}$ $\tilde{L}$-definierbar ist.

Aufgabe 5 (4 Punkte):

Zeigen Sie:

(a) Ist κ eine unendliche Kardinalzahl, so ist $\mathcal{M}$ κ-saturiert genau dann, wenn $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ κ-saturiert ist.

(b) Unter der Annahme, dass $|\mathcal{M}| \geq |L|$ ist: $\mathcal{M}$ ist speziell genau dann, wenn $\mathcal{M}^{\mathrm{eq}}$ speziell ist.