....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 4

Abgabe am 5.11.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Auf dem gesamten Blatt sei L eine Sprache (evtl. mehrsortig), $\mathcal{M}$ eine unendliche L-Struktur und $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur mit uniformer Imaginären-Elimination und sei $A \subset M^{\mathrm{eq}}$. Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ hat auch als $L^{\mathrm{eq}}(A)$-Struktur uniforme Imaginären-Elimination.

Hinweis: Konstruieren Sie aus einer A-definierbaren Äquivalenzrelation eine $\emptyset$-definierbare Äquivalenzrelation, die nützlich ist.

Aufgabe 2 (3+1 Punkte):

Man sagt, eine L-Struktur $\mathcal{M}$ hat *definierbare Skolem-Funktionen*, wenn für jede L-Formel der Form $\psi(\underline{y}) = \exists x\colon \phi(x, \underline{y})$ eine $\emptyset$-definierbare Funktion $f\colon \psi(\mathcal{M}) \to M$ existiert, so dass für alle $\underline{b} \in \psi(\mathcal{M})$ gilt: $\mathcal{M} \models \phi(f(\underline{b}), \underline{b})$. (Man nennt f eine *Skolem-Funktion*.)

(a) Zeigen Sie: Hat $\mathcal{M}$ definierbare Skolem-Funktionen, so hat $\mathcal{M}$ uniforme Imaginären-Elimination.
Korrektur: Diese Behauptung stimmt überhaupt nicht. ((b) ist trotzdem wahr.)

(b) Folgern Sie: $\mathbb{R}$ hat als L_{oring}-Struktur uniforme Imaginären-Elimination. Verwenden Sie dazu Aufgabe 2 von Blatt 5 von der Vorlesung vom vorigen Semester: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModAnw_S19/Uebungen/blatt5.pdf
Anmerkung: Wenn Sie die Vorlesung letztes Semester nicht gehört haben: Die Definition von o-Minimalität ist Definition 5.6.1. (Aber die benötigen Sie jetzt gar nicht.) Und nach Beispiel 5.6.3 ist $\mathbb{R}$ als L_{oring}-Struktur o-minimal.

Aufgabe 3 (2 Punkte):

In Bemerkung 6.3.12 wurde unter anderem behauptet: Sind $\underline{a} \in M^n$ und $\underline{b} \in M^m$ interdefinierbar, so existieren $\emptyset$-definierbare Mengen $X \subset M^n$ und $Y \subset M^m$ und eine $\emptyset$-definierbare Bijektion $f\colon X \to Y$ mit $f(\underline{a}) = \underline{b}$. Zeigen Sie diese Behauptung.

Aufgabe 4 (6 Punkte):

Wir nehmen an, dass $\mathcal{M}$ ein Monstermodell in einer einsortigen Sprache ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ genau dann uniforme Imaginären-Elimination hat, wenn folgende beide Bedingungen gelten:

(a) $\mathcal{M}$ hat Imaginären-Elimination im Sinne von Bemerkung 6.3.13, d. h. jedes imaginäre Element von $\mathcal{M}$ ist interdefinierbar (in der Sprach L^{eq}) zu einem Tupel aus M^n.

(b) In M existieren mindestens zwei verschiedene $\emptyset$-definierbare Elemente.

Anmerkung: „UIE $\Rightarrow$ (a)“ kam schon in der Vorlesung vor (und braucht also nicht nochmal gezeigt zu werden).

Hinweis zu „UIE $\Rightarrow$ (b)“: Können Sie eine explizite Äquivalenzrelation angeben, die (mindestens) zwei Äquivalenzklassen hat, die $\emptyset$-definierbar sind?

Hinweis zu „$\Leftarrow$“: Sie können wie folgt vorgehen, um zu einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf M^m ein f zu konstruieren:

- Zeigen Sie zunächst (mit (a)), dass sich M^m durch $\emptyset$-definierbare Mengen überdecken lässt, auf denen ein $\emptyset$-definierbares f mit den gewünschten Eigenschaften existiert.
- Zeigen Sie, dass diese Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.
- Setzen Sie die so erhaltenen endlich vielen definierbaren Funktionen zu einer Funktion zusammen. (Das benötigt (b).)

Aufgabe 5 (1 Punkte):

Sei $X \subset M^n$ eine definierbare Menge und sei $\underline{a}$ ein Code für X. Wir definieren die Sprache $L' \supset L$, indem wir zu L eine n-stellige Relation für X hinzufügen. Zeigen Sie: $\underline{a} \in \mathrm{dcl}_{L'}(\emptyset)$.