	1	2	3	4	5	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 5

Abgabe am 12.11.2019 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Seien $\delta_1(\underline{x};\underline{y})$ und $\delta_2(\underline{x};\underline{z})$ stabile Formeln. Zeigen Sie, dass dann auch $\phi(\underline{x};\underline{y},\underline{z}) := \delta_1(\underline{x};\underline{y}) \wedge \delta_2(\underline{x};\underline{z})$ stabil ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Zeigen Sie, dass das N in Bemerkung 6.5.4 bei stabilen Formeln δ beliebig groß sein kann: Finden Sie eine Struktur $\mathcal{M}$ und für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine stabile Formel $\delta(\underline{x};\underline{y})$ und Tupel $\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_{N-1}, \underline{b}_0, \dots, \underline{b}_{N-1} \in M^n$ (wobei n von M abhängen kann), so dass die Bedingung aus Definition 6.5.3 erfüllt ist, d. h.:

$$\mathcal{M} \models \delta(\underline{a}_i;\underline{b}_j) \iff 0 \leq i \leq j < N.$$

Hinweis: Dies funktioniert sogar mit der leeren Sprache.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

In Definition 5.9.3 wurde der Begriff der κ-Stabilität eingeführt, für unendliche Kardinalzahlen κ. Bei mehrsortigen Sprachen muss die Definition wie folgt leicht angepasst werden:

Eine Theorie T heißt κ-stabil, wenn für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$, jede Parametermenge $A \subset M$ mit Kardinalität $|A| \leq \kappa$ und jede Sorte S höchstens κ-viele Typen $p(x)$ über A existieren, wobei x eine Variable der Sorte S ist.

Zeigen Sie mit dieser Definition: T ist κ-stabil genau dann, wenn T^{eq} κ-stabil ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte):

Sei $\delta(\underline{x};\underline{y})$ eine beliebige Formel, sei $\mathcal{M}$ eine Struktur und sei $p \in S_\delta(M)$ ein δ-Typ. Zeigen Sie:

(a) Wird p durch ein Element $a \in M$ realisiert, so besitzt p eine δ-Definition über $\{a\}$.

(b) Es existiert eine elementare Erweiterung $\mathcal{M}' \succ \mathcal{M}$ und eine Fortsetzung $q \in S_\delta(M')$ von p (d. h. $q|_M = p$), die (über M') δ-definierbar ist. (Warum erhält man, wenn p nicht definierbar ist, keinen Widerspruch zu Lemma 6.5.12?)

Aufgabe 5 (6 Punkte):

Wir arbeiten in der Struktur $(\mathbb{Q}, <)$ und betrachten $\delta(x;y) := x < y$.

(a) Beschreiben Sie alle δ-Typen in $S_\delta(\mathbb{Q})$, die über $\mathbb{Q}$ δ-defnierbar sind.

(b) Welche der δ-Typen aus (a) sind bereits über $\mathbb{Z}$ δ-definierbar?

(c) Gibt es δ-Typen in $S_\delta(\mathbb{Q})$, die in $\mathbb{Q}$ als $\{<\}$-Struktur nicht definierbar sind, aber in $\mathbb{Q}$ als L_{oring}-Struktur? Und gibt es δ-Typen in $S_\delta(\mathbb{Q})$, die selbst in $\mathbb{Q}$ als L_{oring}-Struktur nicht definierbar sind?