....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 6

Abgabe am 19.11.2019 in der Vorlesung

1	2	3	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Wie immer sei L eine Sprache (evtl. mehrsortig), T eine vollständige L-Theorie mit unendlichen Modellen und $\mathcal{M}$ ein Monstermodell von T. Sei außerdem $\delta(\underline{x};\underline{y})$ eine L-Formel.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass es in Satz 6.5.14 (b) nicht ausreicht, ein festes Modell $\mathcal{M}_0$ zu betrachten, d. h. gesucht ist (in einer geeigneten Sprache) eine instabile Formel $\delta(\underline{x};\underline{y})$ und eine Struktur $\mathcal{M}_0$, so dass jeder δ-Typ $p \in S_\delta(M_0)$ eine δ-Definition besitzt.

Hinweis: Versuchen Sie es zum Beispiel mit einer geeigneten dichten linearen Ordnung.

Aufgabe 2 (6 Punkte):

Sei $B \subset M$. In alten Übungsaufgaben (WiSe 18/19, Blatt 11[1], Aufgabe 3 und SoSe 19, Blatt 2[2], Aufgabe 1) wurde auf $S_{\underline{x}}(B)$ eine Topologie definiert. In der Vorlesung wurde auf analoge Weise auf $S_\delta(B)$ eine Topologie definiert.

Zeigen Sie:

(a) Mit Hilfe der (surjektiven) Einschränkungsabbildung $S_{\underline{x}}(B) \to S_\delta(B), p \mapsto p|_\delta$ kann $S_\delta(B)$ als Quotient von $S_{\underline{x}}(B)$ aufgefasst werden. Zeigen Sie: Die in der Vorlesung definierte Topologie auf $S_\delta(B)$ ist genau die entsprechende Quotiententopologie. (Anders ausgedrückt: Eine Teilmenge von $S_\delta(B)$ ist offen genau dann, wenn ihr Urbild in $S_{\underline{x}}(B)$ offen ist.)

(b) Ist die Einschränkungsabbildung offen (d. h. ist das Bild einer offenen Menge wieder offen)?

(c) Ist die Einschränkungsabbildung abgeschlossen (d. h. ist das Bild einer abgeschlossen Menge wieder abgeschlossen)?

Aufgabe 3 (1+1+2+2+1 Punkte):

Sei $B \subset M$ klein. Ist $X \subset M^n$ B-definierbar, so setzen wir $S_X(B) := \{\mathrm{tp}(\underline{a}/B) \mid \underline{a} \in X\}$. Wir fassen $S_X(B)$ als topologischen Unterraum von $S_{\underline{x}}(B)$ (mit der Topologie von Aufgabe 2) auf.

Zeigen Sie:

(a) Ist X nicht leer, so existiert das Maximum $R(X) := \max\{\mathrm{CB}_{S_X(B)}(p) \mid p \in S_X(B)\}$ (in $\mathrm{On} \cup \{\infty\}$). (Wir setzen $R(\emptyset) := -\infty$.)

(b) Für jede Ordinalzahl β gilt: $R(X) > \beta$ genau dann, wenn die Menge $\{p \in S_X(B) \mid \mathrm{CB}_{S_X(B)}(p) \geq \beta\}$ unendlich ist.

(c) Ist $R(X) > \beta$ für eine Ordinalzahl β, so existieren unendlich viele disjunkte B-definierbare Teilmengen $X_i \subset X$ mit $R(X_i) \geq \beta$.
Hinweis: Zeigen die zunächst (mit Hilfe von (b)) die Existenz einer B-definierbaren Teilmenge $X_1 \subset X$ mit $R(X_1) \geq \beta$ und $R(X \setminus X_1) > \beta$.

(d) Existieren unendlich viele disjunkte B-definierbare Teilmengen $X_i \subset X$ mit $R(X_i) \geq \beta$ für eine Ordinalzahl β, so ist $R(X) > \beta$.

(e) Folgern Sie: Ist $B = M_0$ für eine $\aleph_0$-saturierte elementare Unterstruktur $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$, so ist $R(X) = \mathrm{MR}(X)$, wobei $\mathrm{MR}(X)$ der Morley-Rang ist, der in Definition 5.8.1 eingeführt wurde.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/Mod_W19/

[1] http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModTh_WS18/Uebungen/blatt11.pdf
[2] http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/ModAnw_S19/Uebungen/blatt2.pdf