....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 7

Abgabe am 26.11.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (4 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell. Sei $\delta(x; y) = x = y$ und sei $B \subset M$ klein. Zeigen Sie: Zwei Elemente $a_1, a_2 \in M$ haben den selben δ-Typ über B genau dann wenn,

- entweder $a_1, a_2 \in \operatorname{acl}(B)$ sind und ein Automorphismus $\alpha \in \operatorname{Aut}_B(\mathcal{M})$ existiert mit $\alpha(a_1) = a_2$
- oder weder a_1 noch a_2 in $\operatorname{acl}(B)$ liegen.

Hinweis: Wie sehen Mengen aus, die durch boolsche Kombintationen von Instanzen von δ definierbar sind? Und wann sind solche Mengen über B definierbar?

Aufgabe 2 (4 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir prüfen, dass in Lemma 6.6.10 die Bedingung, dass δ stabil ist, wirklich benötigt wird. Genauer suchen wir eine Struktur $\mathcal{M}$, eine Formel $\delta(\underline{x}; \underline{y})$, einen δ-Typ $p(\underline{x}) \in S_\delta(M)$ und einen $\bar{\delta}$-Typ $q(\underline{y}) \in S_{\bar{\delta}}(M)$, so dass gilt:

- p besitzt eine δ-Definition $\phi(\underline{y})$ und q besitzt eine $\bar{\delta}$-Definition $\psi(\underline{x})$.
- $\phi \in q$ aber nicht $\psi \in p$. (Oder umgekehrt.)

Wir wählen $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}, <)$ und $\delta(x; y) = x < y$.

(a) Prüfen Sie das obige, wenn p der Typ der unendlich großen und q der Typ der unendlich kleinen Elemente ist.

(b) Prüfen Sie das obige, wenn sowohl p als auch q der Typ der unendlich großen Elemente ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Sei $C \subset B \subset M$. Wir wollen verstehen, unter welchen Bedingungen ein Element von B unabhängig von B sein kann. Zeigen Sie, dass die folgenenden Aussagen über ein Element $a \in B$ äquivalent sind:

(i) $a \in \operatorname{acl}(C)$

(ii) Für alle stabilen Formeln $\delta(x; \underline{y})$ gilt: $a \mathop{\smile\mkern-11mu|}^{\delta}_{C} B$

(iii) Für $\delta(x; y) = x = y$ gilt: $a \mathop{\smile\mkern-11mu|}^{\delta}_{C} B$

Aufgabe 4 (4 Punkte):

Sei K ein unendlicher Körper und sei $\mathcal{M}$ ein K-Vektorraum, in der Sprache $L_{K\text{-VR}} = \{0, +, -\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die elementaren Unterstrukturen von $\mathcal{M}$ genau die nicht-trivialen Untervektorräume sind. (Das folgt aus Quantoren-Elimination.) Sie dürfen auch verwenden, dass für beliebige Teilmengen $B \subset M$ gilt: $\operatorname{acl}(B) = \operatorname{dcl}(B) = \langle B \rangle_K$.

Sei $\delta(x; y) = x = y$.

Beschreiben Sie die folgenden Bedingungen aus Sicht der linearen Algebra:

(a) die Bedingung an ein Element $a \in M$, einen Untervektorraum $V \prec \mathcal{M}$ und eine Teilmenge $C \subset V$, dass der Typ $\operatorname{tp}_\delta(a/V)$ über C δ-definierbar ist;

(b) die Bedingung an ein Element $a \in M$ und an Teilmengen $C \subset B \subset M$, dass $a \mathop{\smile\mkern-11mu|}^{\delta}_{C} B$ gilt.

(c) Wie ändern sich die Bedingungen, wenn man für δ die Formel $\delta(x; y_1, y_2) = x = y_1 + y_2$ nimmt?