....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 8

Abgabe am 3.12.2019 in der Vorlesung

1	2	3	4	5	Σ

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell, sei $\delta(\underline{x};\underline{y})$ stabil, seien $C \subset B \subset \mathcal{M}$ klein und sei $\underline{a} \in M^n$ beliebig. Zeigen Sie, dass $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{C} B$ genau dann gilt, wenn ein Modell $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$ existiert mit $B \subset M_0$, so dass $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{C} M_0$ gilt.

Hinweis zu „$\Rightarrow$“: Suchen Sie zunächst ein $\mathcal{M}_0'$ und ein $\underline{a}'$ mit $\operatorname{tp}(\underline{a}'/B) = \operatorname{tp}(\underline{a}/B)$ und $\underline{a}' \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{C} M_0'$.

Aufgabe 2 (2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}$, sei $p(\underline{x}) \in S_\delta(M_0)$ und sei $q(\underline{y}) \in S_{\bar{\delta}}(M_0)$. Sei $\phi(\underline{y})$ die δ-Definition von p und $\psi(\underline{x})$ die $\bar{\delta}$-Definition von q. Nach Lemma 6.6.10 gilt $\phi(\underline{y}) \in q(\underline{y})$ genau dann, wenn $\psi(\underline{x}) \in p(\underline{x})$.

Wir nehmen nun außerdem an, dass $\underline{a} \models p$ und $\underline{b} \models q$ Realisierungen sind, so dass $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{M_0} (M_0 \cup \{\underline{b}\})$ gilt. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen die obigen Bedingungen außerdem äquivalent sind zu: $\mathcal{M} \models \delta(\underline{a};\underline{b})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte):

Wir nehmen an, dass T streng minimal ist, d. h. dass in jedem Modell $\mathcal{M}' \models T$ jede definierbare (mit Parametern) Teilmenge von M entweder endlich oder ko-endlich ist (vgl. Definition 5.5.1).

Seien $C \subset B \subset M$ und sei $a \in M$. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(a) Für jede L-Formel $\delta(x;\underline{y})$ gilt $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{C} B$.

(b) $a \in \operatorname{acl}(C)$ oder $a \notin \operatorname{acl}(B)$.

Hinweis: Erinnern Sie sich daran, dass streng minimale Theorien $\exists^\infty$ eliminieren (Beispiel 5.7.8), d. h. dass sich „die Menge $\phi(\mathcal{M},\underline{y})$ ist unendlich“ durch eine L-Formel $\psi(\underline{y})$ ausdrücken lässt. Behandeln Sie zunächst den Fall, dass B ein Modell ist.

Aufgabe 4 (3 Punkte):

Geben Sie ein Beispiel an für eine Struktur $\mathcal{M}$, eine stabile Formel $\delta(\underline{x};\underline{y})$, Mengen $D \subset C \subset B$ und ein Tupel $\underline{a} \in M^n$, so dass weder $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\delta}_{D} C$ noch $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{C} B$ gilt.

Aufgabe 5 (2+2+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine L-Struktur, I eine unendliche angeordnete Menge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge von Elementen $a_i \in M$. Zeigen Sie:

(a) Ist die Folge $(a_i)_{i\in I}$ ununterscheidbar, so ist sie entweder konstant, oder die Menge $\{a_i \mid i \in I\}$ ist algebraisch unabhängig (d. h. für alle $i \in I$ gilt: $a_i \notin \operatorname{acl}(\{a_j \mid j \in I \setminus \{i\}\})$).

(b) Ist $\mathcal{M}$ streng minimal (Definition 5.5.1; s.o.), so gilt in (a) sogar „genau dann wenn“, d. h. ist $\{a_i \mid i \in I\}$ algebraisch unabhängig, so ist $(a_i)_{i\in I}$ ununterscheidbar.
Hinweis: Erinnern Sie sich an Lemma 5.5.3.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, dass zeigt, dass die Bedinung „streng minimal“ in (b) wirklich benötigt wird.