1	2	Σ

....
Name

....
Matr-Nr. Gruppe

Modelltheorie I – Blatt 9

Abgabe am 10.12.2019 in der Vorlesung

Bitte drucken Sie diese Seite aus und verwenden Sie sie als Deckblatt für Ihre Lösungen.

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Die folgende Umkehrung von Bemerkung 6.7.3 soll gezeigt werden:

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell. Wir nehmen an, dass für jede über $\emptyset$ ununterscheidbare Folge $(\underline{a}_i)_{i\in I}$ ($\underline{a}_i \in M^n$), jedes $k \in \mathbb{N}$, jede L-Formel $\phi(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_k)$, und für alle paarweise verschiedenen $i_1, \dots, i_k \in I$ und $j_1, \dots, j_k \in I$ gilt:

$$\mathcal{M} \models \phi(\underline{a}_{i_1}, \dots, \underline{a}_{i_k}) \iff \mathcal{M} \models \phi(\underline{a}_{j_1}, \dots, \underline{a}_{j_k})$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ stabil ist.

Hinweis: Wenden Sie Satz 6.7.4 auf eine Folge an, die (auf geeignete Weise) die Instabilität einer Formel bezeugt.

Aufgabe 2 (3+1+1+2+2+2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein Monstermodell einer stabilen Theorie. Wir nennen eine unendliche Menge $U \subset M^n$ von n-Tupeln (über $\emptyset$) ununterscheidbar, wenn eine beliebige Aufzählung $(\underline{a}_i)_{i\in I}$ von U ununterscheidbar (über $\emptyset$) ist. (Mit „Aufzählung“ ist gemeint, dass die $\underline{a}_i$ paarweise verschieden sind und dass $U = \{\underline{a}_i \mid i \in I\}$ gilt. Wegen Bemerkung 6.7.3 hängt die Ununterscheidbarkeit von U nicht von einer Anordnung auf I ab.)

Sei nun also $U \subset M^n$ eine kleine (aber unendliche) über $\emptyset$ ununterscheidbare Menge.

(a) Sei $\phi(\underline{x}, \underline{b})$ eine $L(M)$-Formel.
Zeigen Sie, dass die Mengen $U \cap \phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ und $U \cap \neg\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ nicht beide unendlich sind.
Mögliche Vorgehensweise: Zeigen Sie unter Annahme des Gegenteils, dass für jede Teilmenge $V \subset U$ die Menge $\{\phi(\underline{a}, \underline{y}) \mid \underline{a} \in V\} \cup \{\neg\phi(\underline{a}, \underline{y}) \mid \underline{a} \in U \setminus V\}$ endlich erfüllbar ist. Folgern Sie, dass mehr Typen über U existieren als laut Stabilität existieren sollten.

(b) Sei p die Menge derjenigen $L(M)$-Formeln $\phi(\underline{x})$, so dass $U \cap \neg\phi(\mathcal{M}, \underline{b})$ endlich ist. Zeigen Sie, dass p ein vollständiger Typ über M ist.

(c) Sei $\underline{a}' \in M^n$. Zeigen Sie, dass die Menge $U \cup \{\underline{a}'\}$ ununterscheidbar ist genau dann, wenn $\mathrm{tp}(\underline{a}'/U) = p|_U$ ist (für p wie in (b)).

(d) Sei nun $U' \subset M^n$ eine weitere (über $\emptyset$) ununterscheidbare Menge, und sei p' analog zu p konstruiert. Zeigen Sie: $p = p'$ genau dann, wenn eine unendliche Menge $V \subset M^n$ existiert, so dass sowohl $U \cup V$ als auch $U' \cup V$ ununterscheidbar sind.

(e) Sei $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ eine L-Formel. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $\underline{b} \in M^m$ gilt: Die Menge $U \cup \delta(\mathcal{M}; \underline{b})$ ist entweder unendlich oder hat Kardinalität höchstens n.
Hinweis: Benutzen Sie, dass $p|_\delta$ δ-definierbar ist.

(f) Sei weiterhin $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ eine L-Formel. Zeigen Sie, dass ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jede Teilmenge $U_0 \subset U$ der Kardinalität n der Typ $p|_\delta$ über U_0 δ-definierbar ist.

(g) Seien $\delta(\underline{x}; \underline{y})$ und U_0 wie in (f) und sei $\underline{a} \in U \setminus U_0$. Zeigen Sie: $\underline{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\;|}^{\delta}_{U_0} (U \setminus \{\underline{a}\})$.