Nichtstandard-Analysis – Kurzskript

Inhaltsverzeichnis

1 Nichtstandard-Analysis erster Stufe

1.1 Nichtstandard-Erweiterungen

Definition 1.1.1 *Eine **nichtstandard-Erweiterung** einer Menge* $\mathbb{X}$ *ist eine Menge* $\mathbb{Y}$ *zusammen mit Abbildungen* $\mathcal{P}(\mathbb{X}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{Y}^n), A \mapsto {}^*A$ *für alle* $n \geqslant 0$*, die folgende Kompatibilitätsbedingungen erfüllen:*

(a) *(boolsche Kombinationen:) Für alle* $A, B \subseteq \mathbb{X}^n$ *gilt* ${}^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$ *und* ${}^*(\mathbb{X}^n \backslash A) = \mathbb{Y}^n \backslash {}^*A$

(b) *(Kartesisches Produkt:) Für alle* $A \subseteq \mathbb{X}^n$*,* $B \subseteq \mathbb{X}^m$ *gilt:* ${}^*(A \times B) = {}^*A \times {}^*B$

(c) *(Projektionen:) Sei* $\pi(a_1, \dots, a_{n+1}) = (a_1, \dots, a_n)$*. Dann gilt für* $A \subseteq \mathbb{X}^{n+1}$*:* ${}^*(\pi(A)) = \pi({}^*A)$

(d) *(Diagonalen:) Seien* $1 \leqslant i, j \leqslant n$*. Dann gilt:* ${}^*(\{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{X}^n \mid a_i = a_j\}) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Y}^n \mid a_i = a_j\}$

Hierbei ist $\mathbb{X}^0$ eine ein-elementige Menge, nämlich das „leere Tupel“ (selbst dann, wenn $\mathbb{X} = \varnothing$ ist).

Bemerkung 1.1.2 $\mathbb{X}^0$ *enthält genau ein Element, nämlich das leere Tupel* $()$.

Beispiel 1.1.3 $\mathbb{X}$ *ist eine nichstandard-Erweiterung von sich selbst, wenn man und* ${}^*A = A$ *für alle* $A \subseteq \mathbb{X}^n$ *setzt (aber das ist natürlich langweilig).*

Lemma 1.1.4 *Sei* $\mathbb{Y}$ *eine nichstandard-Erweiterung von* $\mathbb{X}$ *und sei* $A \subseteq \mathbb{X}^n$*. Dann gilt:*

(a) $A = \varnothing \Leftrightarrow {}^*A = \varnothing$.

(b) $A = \mathbb{X}^n \Leftrightarrow {}^*A = \mathbb{Y}^n$.

Insbesondere ist $\mathbb{Y} = {}^*\mathbb{X}$. In Zukunft ist $\mathbb{X}$ immer eine nicht-leere Menge und ${}^*\mathbb{X}$ eine nichstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

1.2 Formeln und Transfer-Prinzip

Beispiel 1.2.1 *Ist* $A \subseteq \mathbb{X}^n$ *ein-elementig, so ist auch* ${}^*A$ *ein-elementig.*

Definition 1.2.2 *Seien* $x_1, \dots, x_n$ *Variablen. Ausdrücke der folgenden Formen nennt man **Formeln (erster Stufe)** (über* $\mathbb{X}$*) in* $x_1, \dots, x_n$*:*

(i) *„*$x_i = x_j$*“ für* $1 \leqslant i, j \leqslant n$

(ii) *„*$(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in A$*“, für ein* $A \subseteq \mathbb{X}^k$

(iii) *„*$\psi \wedge \psi'$*“ und „*$\neg\psi$*“, wobei* ψ*,* ψ' *Formeln in* $x_1, \dots, x_n$ *sind.*

(iv) *„*$\exists y \in \mathbb{X}\colon \psi$*“, wobei* ψ *eine Formel in* $x_1, \dots, x_n, y$ *ist.*

Ist ϕ *eine Formel in* $x_1, \dots, x_n$*, so schreibt man auch* $\phi(x_1, \dots, x_n)$*. Man nennt* $x_1, \dots, x_n$ *auch die **freien Variablen** von* $\phi(x_1, \dots, x_n)$*. (Im Gegensatz dazu ist das* y *aus (iv) eine **gebundene Variable**.)*

*Eine Formel erster Stufe ohne freie Variablen nennt man **Aussage (erster Stufe)**.*

Beispiel 1.2.3 *Ist* $A \subseteq \mathbb{X}$*, so ist* $\exists x \in \mathbb{X} : \exists y \in \mathbb{X} : ((x \in A \wedge y \in A) \wedge \neg(x = y))$ *eine Aussage über* $\mathbb{X}$.

Bemerkung 1.2.4 *Ist* $\phi(x_1, \dots, x_n)$ *eine Formel über* $\mathbb{X}$ *und sind* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{X}$*, so kann man* a_i *für* x_i *einsetzen, und es macht Sinn zu fragen, ob* $\phi(a_1, \dots, a_n)$ *wahr oder falsch ist. (In eine Aussage muss man nichts einsetzen und kann direkt fragen, ob sie wahr oder falsch ist.)*

Notation 1.2.5 *Ich werde Tupel oft mit unterstrichenen Buchstaben bezeichnen, z. B.* $\underline{x} := (x_1, \dots, x_n)$.

Definition 1.2.6 *Ist* $\phi(\underline{x})$ *eine Formel über* $\mathbb{X}$*, so setzt man:*

$$\phi(\mathbb{X}) := \{\underline{a} \in \mathbb{X}^n \mid \phi(\underline{a}) \text{ gilt}\}$$

($\phi(\mathbb{X})$ ist also die Menge der Tupel, für die die Formel gilt.)

Bemerkung: Im Fall $n = 0$ ist $\phi(\mathbb{X}) = \varnothing$ falls ϕ falsch ist und $\phi(\mathbb{X}) = \mathbb{X}^0$ falls ϕ wahr ist.

Bemerkung 1.2.7 *Viele weitere mathematische Ausdrücke (die nicht in Definition 1.2.2 erwähnt werden) können in eine Formel erster Stufe übersetzt werden, z. B.:*

- $x \neq y \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(x = y)$
- $\phi \vee \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$
- $\phi \Rightarrow \psi \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\phi \vee \psi$
- *Sei* $A \subseteq \mathbb{X}^n$ *eine Teilmenge. Dann:*
  - $\exists \underline{x} \in A\colon \phi(\underline{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists x_1 \in \mathbb{X}\colon \dots \exists x_n \in \mathbb{X}\colon \underline{x} \in A \wedge \phi(\underline{x})$
  - $\forall \underline{x} \in A\colon \phi(\underline{x}) \quad \Longleftrightarrow \quad \neg\exists \underline{x} \in A\colon \neg\phi(\underline{x})$
  - $\exists^{=1} \underline{x} \in A\colon \phi(x) \quad \Longleftrightarrow$
    $\exists \underline{x} \in A\colon \phi(x) \wedge (\forall \underline{x}, \underline{y} \in A : ((\phi(\underline{x}) \wedge \phi(\underline{y}) \Rightarrow \underline{x} = \underline{y})$

Definition 1.2.8 *Ist* $\phi(x_1, \dots, x_n)$ *eine Formel erster Stufe über* $\mathbb{X}$*, so definiert man daraus eine Formel erster Stufe* ${}^*\phi$ *über* ${}^*\mathbb{X}$*, indem man jedes „*$\underline{x} \in A$*“ ersetzt durch „*$\underline{x} \in {}^*A$*“ (wobei* $\underline{x}$ *ein* k*-Tupel von Variablen ist und* $A \subseteq \mathbb{X}^k$*), und auch jedes „*$\exists y \in \mathbb{X}$*“ durch „*$\exists y \in {}^*\mathbb{X}$*“.*

Satz 1.2.9 *(Transfer-Prinzip) Für beliebige Formeln erster Stufe* ϕ *über* $\mathbb{X}$ *gilt:* $({}^*\phi)({}^*\mathbb{X}) = {}^*(\phi(\mathbb{X}))$*. Falls* ϕ *eine Aussage ist, gilt insbesondere:* ϕ *ist wahr genau dann wenn* ${}^*\phi$ *wahr ist.*

Korollar und Definition 1.2.10 (a) *Für* $a \in \mathbb{X}$ *ist* ${}^*\{a\} \subseteq {}^*\mathbb{X}$ *eine einelementige Menge. Das Element dieser Menge bezeichnen wir mit* ${}^*a$*.*

(b) *Die Abbildung* $\mathbb{X} \to {}^*\mathbb{X}, a \mapsto {}^*a$ *ist injektiv.*

Bemerkung 1.2.11 *Ist* x *eine Variable und* $a \in \mathbb{X}$*, so können wir* $x = a$ *als Formel erster Stufe schreiben:* $x \in \{a\}$*.*

Wenn „$x = a$*“ in einer Formel* ϕ *vorkommt, wird in* ${}^*\phi$ *daraus „*$x = {}^*a$*“.*

Korollar 1.2.12 *Ist* $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ *endlich, so ist* ${}^*A = \{{}^*a_1, \dots, {}^*a_n\}$*.*

Korollar und Definition 1.2.13 *Seien* $A_i \subseteq \mathbb{X}^{n_i}$ *Mengen für* $i = 1, 2$ *und* $f\colon A_1 \to A_2$ *eine Funktion. Dann gibt es zu jedem* $a \in {}^*A_1$ *genau ein* $b \in {}^*A_2$*, so dass* $(a, b) \in {}^*(\operatorname{graph}(f))$ *gilt. Anders ausgedrückt: Die Menge* ${}^*(\operatorname{graph}(f))$ *ist der Graph einer Funktion* ${}^*A_1 \to {}^*A_2$*; diese Funktion bezeichnen wir mit* ${}^*f$*.*

Bemerkung 1.2.14 *Ist* $f\colon A_1 \to A_2$ *wie oben, so können wir* $f(\underline{x}) = \underline{y}$ *als Formel erster Stufe schreiben:* $(\underline{x}, \underline{y}) \in \operatorname{graph} f$*.*

Wenn „$f(\underline{x}) = \underline{y}$*“ in einer Formel* ϕ *vorkommt, wird in* ${}^*\phi$ *daraus:* ${}^*f(\underline{x}) = \underline{y}$*.*

Bemerkung 1.2.15 *Auch Ausdrücke mit verketteten Funktionen und Konstanten lassen sich als Formeln erster Stufe schreiben.*

Beispiel: Für Funktionen $f\colon \mathbb{X}^2 \to \mathbb{X}, g, h\colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ und für $a \in \mathbb{X}$ habe: $f(g(x), h(x')) = a \iff$
$\exists y, y'\colon (x, y) \in \operatorname{graph} g \wedge (x', y') \in \operatorname{graph} h \wedge (y, y', a) \in \operatorname{graph} f$.

Beim Übergang von ϕ nach ${}^*\phi$ muss man nur Sterne an alle Funktionen und Konstanten schreiben. (Im Beispiel: ${}^*f({}^*g(x), {}^*h(x')) = {}^*a$.)

Bemerkung 1.2.16 *Wir werden oft $\mathbb{X}$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{X}$ auffassen, indem wir a mit ${}^*a$ identifizieren. Mit dieser Identifikation erhalten wir:*

(a) *Für Teilmengen $A \subseteq \mathbb{X}^n$ gilt: ${}^*A \cap \mathbb{X}^n = A$.*
(b) *Für Funktionen $f\colon A_1 \to A_2$ (mit $A_i \subseteq \mathbb{X}^{n_i}$) gilt: ${}^*f|_A = f$. Aus diesem Grund können wir ohne Verwechslungsgefahr statt ${}^*f$ einfach f schreiben.*

Beispiel 1.2.17 *Seien $A_i \subseteq \mathbb{X}^{n_i}$ Mengen für $i = 1, 2, 3$, $f\colon A_1 \to A_2, g\colon A_2 \to A_3$ Funktionen und $a \in A_1$. Dann gilt:*

(a) ${}^*(f(a)) = ({}^*f)({}^*a)$.
(b) ${}^*(g \circ f) = {}^*g \circ {}^*f$
(c) *$f\colon A_1 \to A_2$ ist injektiv/surjektiv gdw. ${}^*f\colon {}^*A_1 \to {}^*A_2$ injektiv/surjektiv ist.*

Beispiel 1.2.18 *Über ${}^*\mathbb{R}$ erhält man insbesondere:*

- *Funktionen ${}^*+, {}^*\cdot\colon {}^*\mathbb{R} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$; diese setzen $+$ und $\cdot$ fort. Wir schreiben $+$ und $\cdot$ statt ${}^*+, {}^*\cdot$.*
- *${}^*\mathbb{R}$ ist ein Körper (mit additiv neutralem ${}^*0 = 0$ und multiplikativ neutralem ${}^*1 = 1$).*
- *Wir haben eine Ordnungrelation ${}^*\leqslant$ auf ${}^*\mathbb{R}$; diese setzt $\leqslant$ auf $\mathbb{R}$ fort, d. h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt: $a \,{}^*\!\leqslant b \iff a \leqslant b$. Wir schreiben $\leqslant$ statt ${}^*\leqslant$. Die Ordungsrelation ist (im üblichen Sinn) kompatibel mit Addition und Multiplikation.*
- *Wir haben eine Betragsfunktion $|\cdot|\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit den üblichen Eigenschaften.*
- *Jedes $a \in {}^*\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ besitzt eine Quadratwurzel in ${}^*\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ (d. h. ein b mit $b^2 = a$); und allgemeiner auch n-te Wurzeln für jedes $n \in \mathbb{N}$.*
- *Wir haben eine Funktion ${}^*\mathbb{R}_{\geqslant 0} \times {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}, (a, b) \mapsto a^b$ mit den üblichen Eigenschaften.*
- *Jedes Polynom ungeraden Grades über ${}^*\mathbb{R}$ hat (mindestens) eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.*
- *Wir haben Teilmengen ${}^*\mathbb{N} \subseteq {}^*\mathbb{Z} \subseteq {}^*\mathbb{Q} \subseteq {}^*\mathbb{R}$.*
- *Ist $a \in {}^*\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}$, so ist $a > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
- *${}^*\mathbb{Z} = {}^*\mathbb{N} \cup -{}^*\mathbb{N}$; ${}^*\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in {}^*\mathbb{Z}, b \neq 0\}$; ${}^*\mathbb{Q}$ liegt dicht in ${}^*\mathbb{R}$, d. h. zu jedem $a \in {}^*\mathbb{R}$ und jedem $\epsilon > 0$, $\epsilon \in {}^*\mathbb{R}$ gibt es ein $q \in {}^*\mathbb{Q}$ mit $|a - q| < \epsilon$.*
- *Man kann Teilbarkeit für Zahlen aus ${}^*\mathbb{Z}$ definieren (a teilt b wenn es ein $c \in {}^*\mathbb{Z}$ gibt mit $ac = b$) und es hat die üblichen Eigenschaften.*
- *Ist $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen, so ist ${}^*\mathbb{P}$ die Menge der $n \in {}^*\mathbb{N}$, die nur durch 1 und durch sich selbst teilbar sind.*
- *Fermats Satz übersetzt sich zu: Die Gleichung $a^k + b^k = c^k$ hat keine Lösung mit $a, b, c, k \in {}^*\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $k \geqslant 3$.*

1.3 Existenz von echten nichtstandard-Erweiterungen

Definition 1.3.1 *$\mathbb{X} \prec {}^*\mathbb{X}$ heißt **echt** wenn für alle unendlichen $A \subseteq \mathbb{X}^n$ gilt: $A \hookrightarrow {}^*A$ ist nicht surjektiv.*

Definition 1.3.2 *Sei I eine nicht-leere Menge. Ein **Filter** auf I ist eine Abbildung $\mu\colon \mathcal{P}(I) \to \{0,1\}$ mit:*
(a) $\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$.
(b) $\mu(A) + \mu(I \backslash A) \leqslant 1$
*Wenn in (b) Gleichheit gilt, nennt man μ **Ultrafilter**.*

Beispiel 1.3.3 *Sei I unendlich; setze $\mu(A) := 1$ genau dann, wenn $I \backslash A$ endlich ist (und $\mu(A) = 0$ sonst). Dies ist ein Filter auf I. (Man nennt ihn den **Fréchet-Filter**.)*

Beispiel 1.3.4 *Zu jedem $i \in I$ erhält man einen Ultrafilter: $\mu(A) := 1 \iff i \in A$.*

Bemerkung 1.3.5
(i) *Ist μ ein Filter auf I und ist $A \subseteq B \subseteq I$, so ist $\mu(A) \leqslant \mu(B)$.*
(ii) *In der Definition von Filter kann man statt (b) auch fordern: $\mu(\varnothing) = 0$. (Das ist äquivalent.)*

Lemma 1.3.6 *Zu jedem Filter μ auf I gibt es einen Ultrafilter μ' auf I, so dass für alle $A \subseteq I$ gilt: $\mu'(A) \geqslant \mu(A)$.*

Beispiel 1.3.7 *Das Lemma auf Beispiel 1.3.3 anwenden liefert einen Ultrafilter μ', so dass $\mu'(A) = 0$ für alle endlichen $A \subseteq I$ gilt (da $\mu'(I \backslash A) \geqslant \mu(I \backslash A) = 1$). Einen solchen Ultrafilter (d. h. mit $\mu'(A) = 0$ für alle endlichen $A \subseteq I$) nennt man **frei**.*

Definition 1.3.8 *Sei $\mathbb{X}$ eine Menge und μ ein Ultrafilter auf einer Indexmenge I. Wir schreiben $\mathbb{X}^I$ für mit I indizierte Folgen von Elementen von $\mathbb{X}$. Wir definieren die **Ultrapotenz** $\mathbb{X}^I/\mu := \mathbb{X}^I/{\sim}$, wobei:*

$$(a_i)_i \sim (b_i)_i \iff \mu(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1.$$

Wir schreiben $[a_i]_i$ für die Äquivalenzklasse von $(a_i)_i$ in $\mathbb{X}^I/\mu$.

Satz 1.3.9 *Seien $\mathbb{X}$, I und μ wie in der vorigen Definition. Dann gibt es zu jeder Menge $A \subseteq \mathbb{X}^n$ eine Menge ${}^*A \subseteq (\mathbb{X}^I/\mu)^n$, so dass für alle $(a_{1,i})_i \ldots, (a_{n,i})_i \in \mathbb{X}^I$ gilt:*

$$([a_{1,i}]_i, \ldots, [a_{n,i}]_i) \in {}^*A \iff \mu(\{i \in I \mid (a_{1,i}, \ldots, a_{n,i}) \in A\}) = 1$$

Dies macht $\mathbb{X}^I/\mu$ zu einer nichtstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Bemerkung 1.3.10 *Seien $\mathbb{X}$, I, μ, ${}^*\mathbb{X} = \mathbb{X}^I/\mu$ wie im vorigen Satz. Dann gilt für $a \in \mathbb{X}$: ${}^*a = [a_i]_i$, wobei $a_i = a$ für alle $i \in I$.*

Satz 1.3.11 *Jede Menge $\mathbb{X}$ besitzt echte nichtstandard-Erweiterungen.*

1.4 Die Beziehung zwischen $\mathbb{R}$ und ${}^*\mathbb{R}$

Von nun an sei ${}^*\mathbb{R}$ immer eine echte nichtstandard-Erweiterung von $\mathbb{R}$.

Definition 1.4.1 *Die **endlichen** Zahlen sind* ${}^*\mathbb{R}^{\text{fin}} := \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid \exists r \in \mathbb{R}_{>0} : |a| < r\}$. *Elemente von* ${}^*\mathbb{R} \backslash {}^*\mathbb{R}^{\text{fin}}$ *nennen wir **unendlich**. Die **infinitesimalen** Zahlen sind* $\{a \in {}^*\mathbb{R} \mid \forall r \in \mathbb{R}_{>0} : |a| < r\}$. *Für* $a, b \in {}^*\mathbb{R}$ *schreiben wir* $a \simeq b$ *genau dann, wenn* $a - b$ *infinitesimal ist. Die **Monade** um* $b \in \mathbb{R}$ *ist* $\operatorname{mon}(b) := \{a \in {}^*\mathbb{R} \mid a \simeq b\}$.

Bemerkung 1.4.2
(a) $a \simeq b$ *ist eine Äquivalenzrelation auf* ${}^*\mathbb{R}$.
(b) *Ein Element* $a \in {}^*\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *unendlich genau dann wenn* $\frac{1}{a}$ *infinitesimal ist.*
(c) ${}^*\mathbb{R}$ *enthält unendliche und infinitesimale Zahlen.*
(d) ${}^*\mathbb{R}^{\text{fin}}$ *ist ein Ring mit (einzigem) maximalem Ideal* $\operatorname{mon}(0)$.

Lemma 1.4.3 *Zu jedem* $a \in {}^*\mathbb{R}^{\text{fin}}$ *existiert genau ein Element in* $\operatorname{mon}(a) \cap \mathbb{R}$*; man nennt es den **Standard-Anteil** von* a *und schreibt* $\operatorname{st}(a)$ *dafür. Die Abbildung* $\operatorname{st}\colon {}^*\mathbb{R}^{\text{fin}} \to \mathbb{R}$ *ist ein surjektiver Ring-Homomorphismus (mit Kern* $\operatorname{mon}(0)$*).*

Lemma 1.4.4 *Sei* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Dann gilt:*
(a) X *ist unbeschränkt genau dann, wenn* ${}^*X \backslash {}^*\mathbb{R}^{\text{fin}} \neq \emptyset$.
(b) *Ein Element* $a \in \mathbb{R}$ *liegt im topologischen Abschluss von* X *genau dann, wenn* $X \cap \operatorname{mon}(a) \neq \emptyset$.

1.5 Folgen

Notation 1.5.1 *Ist* a_n *eine Folge von reellen Zahlen (d. h.* $a_n \in \mathbb{R}$ *für* $n \in \mathbb{N}$*), so verwenden wir auch die gleiche Notation für die entsprechende Folge in* ${}^*\mathbb{R}$, *d. h. für* $n \in {}^*\mathbb{N}$ *ist* $a_n \in {}^*\mathbb{R}$ *dadurch definiert, dass* $\{(n, a_n) \mid n \in {}^*\mathbb{N}\} = {}^*\{(n, a_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *ist.*

Satz 1.5.2 *Für eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gilt:*
(a) $(a_n)_n$ *ist beschränkt genau dann, wenn für alle* $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$ *gilt:* $a_N \in {}^*\mathbb{R}^{\text{fin}}$.
(b) *Die Menge der Häufungspunkte von* $(a_n)_n$ *ist genau* $\mathbb{R} \cap \{\operatorname{st}(a_N) \mid N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}\}$
(c) $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ *genau dann, wenn* $\operatorname{st}(a_N) = b$ *für alle* $N \in {}^*\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}$.

Anwendung 1.5.3 (Bolzano-Weierstraß) *Jede Beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.*

Lemma 1.5.4 *Eine Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(mit* $a_n \in \mathbb{R}$*) ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn* $a_N \simeq a_{N'}$ *für alle unendlichen* N, N' *gilt.*

Anwendung 1.5.5 *Eine Folge ist eine Cauchy-Folge genau dann, wenn sie konvergiert.*

1.6 Stetigkeit, Differenziale

Lemma 1.6.1 *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $f\colon A \to \mathbb{R}$. *(*$\bar{A}$ *bezeichnet den topologischen Abschluss von* A*.) Dann gilt:*
(a) $\lim_{x\to a} f(x) = b$ *(für* $a \in \bar{A}$*)* $\iff$ *Für alle* $x \in {}^*A$ *mit* $x \sim a$ *gilt* $f(x) \sim b$.

(b) *f ist stetig genau dann, wenn für alle $x, x' \in A$ gilt: $x \simeq x' \Rightarrow f(x) \simeq f(x')$.*

Lemma 1.6.2 *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. Betrachte $c_t := \frac{f(a+t)-f(a)}{t}$ für $t \in \operatorname{mon}(0) \backslash \{0\}$. Dann ist f ist differenzierbar bei a genau dann, wenn c_t entlich ist für alle t und wenn $\operatorname{st}(c_t)$ nicht von t abhängt. In diesem Fall ist $f'(a) = \operatorname{st}(c_t)$.*

Anwendung 1.6.3 *Für Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

(a) *Ist f differenzierbar in x und g differenzierbar in $y := f(x)$, so ist $g \circ f$ ist differenzierbar in x, und es gilt $(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x))$*

(b) *Falls f invertierbar ist, differenzierbar in x und $f'(x) \neq 0$ ist, so ist f^{-1} differenzierbar in $y := f(x)$, und es gilt: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$*

2 Höher-stufige nichstandard-Analysis

2.1 Superstrukturen

Definition 2.1.1 *Sei eine Menge $\mathbb{V}_0$ gegeben. Setze $\mathbb{V}_{n+1} := \mathbb{V}_0 \,\dot\cup\, \mathcal{P}(\mathbb{V}_n)$. Dann gilt $\mathbb{V}_n \subseteq \mathbb{V}_{n+1}$ für alle n. Die Vereinigung $\mathbb{X} := \mathcal{S}(\mathbb{V}_0) := \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{V}_n$ nennt man die **Superstruktur** über $\mathbb{V}_0$.*

Bemerkung: Wir nehmen hier (und im Folgenden) der Einfachheit halber an, dass $\mathbb{V}_0$ keine Mengen enthält.

Bemerkung 2.1.2 *Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{X}$ ist ein Element von $\mathbb{X}$ genau dann, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $A \subseteq \mathbb{V}_n$. Insbesondere folgt aus $A \in \mathbb{X}$ und $B \subseteq A$, dass $B \in \mathbb{X}$ ist.*

Bemerkung 2.1.3 *Ist $a \in \mathbb{X} \backslash \mathbb{V}_0$, so ist $\mathcal{P}(a) \in \mathbb{X}$.*

Notation 2.1.4 *$\in$ ist eine zweistellige Relation auf $\mathbb{X}$; wie üblich erlaubt uns Definition 1.2.2 (ii), dies in Formeln zu verwenden: „$x \in y$“ ist eine Kurzschreibweise für die Formel „$(x, y) \in R$“, wobei $R = \{(a, b) \in \mathbb{X} \times (\mathbb{X} \backslash \mathbb{V}_0) \mid a \in b\}$.*

Bemerkung 2.1.5 *Ist $A \in \mathbb{V}_n \backslash \mathbb{V}_0$ für ein $n \geqslant 1$, so kann „$x \in A$“ auf zwei verschiedene Arten als Formel interpretiert werden: im Sinne von Definition 1.2.2 (ii) oder im Sinne von Notation 2.1.4, wobei A eine Konstante ist. Diese Formeln sind aber äquivalent.*

Bemerkung 2.1.6 *Folgende Dinge lassen sich jetzt als Formeln (im Sinne von Definition 1.2.2) ausdrücken:*

(a) *x ist eine Menge $\iff x \notin \mathbb{V}_0$.*

(b) *$x = y \cup z \iff x, y, z \notin \mathbb{V}_0 \wedge \forall a \in \mathbb{X}\colon (a \in x \iff (a \in y \vee a \in z))$.*

(c) *$x = \{y\} \iff \forall u : (u \in x \iff u = y)$.*

(d) *Entsprechend: $x = \{y_1, y_2\}$, etc.*

(e) *$x \subseteq y \iff x, y \notin \mathbb{V}_0 \wedge \forall z : z \in x \Rightarrow z \in y$.*

(f) *$x = \mathcal{P}(y)$*

(g) *Falls $y \in \mathbb{X}$ eine Menge von Mengen ist: $x = \bigcup_{a \in y} a$...*

(h) *Für beliebige Formeln ϕ: $x = \{z \mid \phi(z)\} \iff \forall z : z \in x \Leftrightarrow \phi(z, y)$.*
Vorsicht: Ein x, das diese Bedingung erfüllt, existiert nicht notwendigerweise in $\mathbb{X}$. Wenn man statt dessen $x = \{z \in y \mid \phi(z)\}$ betrachtet (als Formel in x und y), existiert x immer in $\mathbb{X}$.

Bemerkung 2.1.7 (a) *Ein Tupel aus $\mathbb{X}$ kann durch ein einzelnes Element kodiert werden, indem wir eine Bijektion $\eta_n\colon \mathbb{X}^n \to \mathbb{X}$ wählen. Um uns das Leben zu vereinfachen, wählen wir η_n so, dass $\eta_n(\mathbb{V}_\ell^n) \subseteq \mathbb{V}_\ell$ gilt. Dies definiert auch eine Bijektion $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\ell^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{V}_\ell)$, so dass wir $\mathcal{P}(\mathbb{V}_\ell^n)$ als Teilmenge von $\mathbb{V}_{\ell+1}$ auffassen können (was wir in Zukunft tun werden).*

(b) *Ist $A \subseteq \mathbb{V}_\ell^n$ und $B \subseteq \mathbb{V}_\ell^m$, so kann eine Funktion $f\colon A \to B$ durch ihren Graph beschrieben werden, also als Element von $\mathcal{P}(A \times B) \subseteq \mathbb{V}_{\ell+1}$ angesehen werden. Auf diese Art werden wir $\mathrm{Abb}(A, B)$ als Teilmenge von $\mathbb{V}_{\ell+1}$ ansehen (und damit auch als Element von $\mathbb{V}_{\ell+2}$).*

Auf diese Art können wir in Formeln jetzt auch Variablen für Mengen von Tupeln, für Funktionen und für Kombinationen daraus verwenden (z. B. Mengen von Tupeln von Funktionen, etc.)

Beispiel 2.1.8 (a) *Mit „$z = (x, y)$“ meinen wir: z ist der Code des Paars (x, y).*
Als Formel: $\eta_2(x, y) = z$

(b) *Mit „$x = y \times z$“ meinen wir: x ist die Menge der Codes der Paare aus $y \times z$.*
Als Formel: $x = \{\eta_2(a, b) \mid a \in y, b \in z\}$

(c) *Mit „$x \in \mathrm{Abb}(y, z)$“ meinen wir: x ist der Code einer Abbildung von y nach z.*
Als Formel: $x \subseteq y \times z \wedge \forall a \in y \exists^{=1} b \in z : (a, b) \in x$

(d) *Ist $x \in \mathrm{Abb}(y, z)$ und $a \in y$ so meinen wir mit „$x(a) = b$“: $f(a) = b$, wobei f die durch x codierte Abbildung von y nach z ist.*

2.2 NS-Erweiterungen von Superstrukturen

Sei weiterhin $\mathbb{X} = \mathcal{S}(\mathbb{V}_0)$ die Superstruktur über einer Menge $\mathbb{V}_0$, und sei jetzt ${}^*\mathbb{X}$ eine echte nonstandard-Erweiterung von $\mathbb{X}$.

Notation 2.2.1 *Elemente $a \in \mathbb{X}$ identifizieren wir in Zukunft nur noch dann mit dem entsprechenden Element ${}^*a \in {}^*\mathbb{X}$ wenn $a \in \mathbb{V}_0$ ist (d. h. wir fassen $\mathbb{V}_0$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{V}_0$ auf aber nicht $\mathbb{V}_\ell$ als Teilmenge von ${}^*\mathbb{V}_\ell$ für $\ell \geqslant 1$).*

Satz 2.2.2 *Sei „$x \mathrel{{}^*\!\!\in} y$“ die Formel, die man durch Transferieren der Formel „$x \in y$“ im Sinne von Notation 2.1.4 erhält. Auf diese Art können wir jedem Element $b \in {}^*\mathbb{X} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ eine Teilmenge von ${}^*\mathbb{X}$ zuordnen: $M_b := \{a \in {}^*\mathbb{X} \mid a \mathrel{{}^*\!\!\in} b\}$. Diese Abbildung ${}^*\mathbb{X} \backslash {}^*\mathbb{V}_0 \to \mathcal{P}({}^*\mathbb{X}), b \mapsto M_b$ ist injektiv, und für $b \in {}^*\mathbb{V}_{\ell+1} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ ist $M_b \subseteq {}^*\mathbb{V}_\ell$.*

Notation 2.2.3 *In der Situtation von Satz 2.2.2 identifizieren wir b mit der Menge M_b, so dass insbesondere ${}^*\mathbb{V}_{\ell+1} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ mit einer Teilmenge von $\mathcal{P}({}^*\mathbb{V}_\ell)$ identifiziert wird, und die Relation ${}^*\!\!\in$ auf $\mathbb{X}$ wird zu $\in$.*

Bemerkung 2.2.4 *Ist $A \subseteq \mathbb{V}_\ell$ für ein ℓ, so hat ${}^*A$ zwei Bedeutungen: Einerseits ist $A \subseteq \mathbb{X}$, so dass wir eine Teilmenge ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{X}$ erhalten. Andererseits ist $A \in \mathbb{V}_{\ell+1} \backslash \mathbb{V}_0$, so dass wir ein Element ${}^*A \in {}^*\mathbb{V}_{\ell+1} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ erhalten, das mit der Menge $M_{{}^*A} \subseteq {}^*\mathbb{V}_\ell$ identifiziert wird. Diese beiden Mengen ${}^*A$ und $M_{{}^*A}$ sind gleich.*

Unter Verwendung von Bemerkung 2.1.7 gilt das entsprechende auch für Teilmengen von $\mathbb{V}_\ell^n$ und für Funktionen.

Bemerkung: Die Formel „$\forall A \subseteq \mathbb{V}_n$“ transferiert sich *nicht* zu „$\forall A \subseteq {}^*\mathbb{V}_\ell$“, sondern zu „$\forall A \in {}^*\mathbb{V}_{\ell+1} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$“. Die Menge ${}^*\mathbb{V}_{\ell+1} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ ist in der Regel eine echte Teilmenge von $\mathcal{P}({}^*\mathbb{V}_\ell)$.

Bemerkung 2.2.5 *Die Formeln $x = y \cup z$, $x = \{y\}, x \subseteq y, x = \bigcup_{a \in y} a, x = \{z \mid \phi(z)\}$ aus Bemerkung 2.1.6 transferieren sich wie erwartet.*

Die Formel $x = \mathcal{P}(y)$ transferiert sich zu: $x = \{a \in {}^*\mathbb{X} \backslash {}^*\mathbb{V}_0 \mid a \subseteq y\} =: ({}^*\mathcal{P})(x)$.

Bemerkung 2.2.6 *Dass das η_n aus Bemerkung 2.1.7 eine Bijektion $\mathbb{X}^n \to \mathbb{X}$ ist, transferiert sich zu: ${}^*\eta_n$ ist eine Bijektion ${}^*\mathbb{X}^n \to {}^*\mathbb{X}$. Insbesondere können Teilmengen $A \subseteq {}^*\mathbb{V}_\ell^n$ durch Teilmengen von ${}^*\mathbb{V}_\ell$ codiert werden, und die Formeln aus Beispiel 2.1.8 transferieren sich wie erwartet.*

Anmerkung: ${}^*\mathbb{X}$ ist nicht die übliche Definition einer nonstandard-Superstruktur. Statt dessen definiert man üblicherweise ${}^*\mathbb{X} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} {}^*\mathbb{V}_n$. (Dann muss man aber das Transferprinzip abwandeln.) Wir bleiben in dieser Vorlesung bei unsere Definition.

2.3 Interne und externe Mengen

Definition 2.3.1 (a) *Ein **Standardelement** von ${}^*\mathbb{X}$ ist ein Element der Form ${}^*a$, für $a \in \mathbb{X}$. Insbesondere heißt eine Teilmenge $A \subseteq {}^*\mathbb{X}$ **standard**, wenn $A = {}^*B$ ist für ein $B \subseteq \mathbb{X}$.*

(b) *Eine Teilmenge von ${}^*\mathbb{X}$ heißt **intern**, wenn sie ein Element von ${}^*\mathbb{X} \backslash {}^*\mathbb{V}_0$ ist; sonst nennt man sie **extern**. (Elemente von ${}^*\mathbb{V}_0$ nennt man auch intern.)*

(c) *Mit Hilfe von Bemerkung 2.1.7 definieren wir die Begriffe standard, intern und extern auch für Teilmengen von ${}^*\mathbb{X}^n$ und für Funktionen ${}^*\mathbb{X}^n \to {}^*\mathbb{X}^m$. (Eine Funktion ist standard bzw. intern, wenn ihr Graph standard bzw. intern ist.)*

Bemerkung 2.3.2 *Zu $A \subseteq {}^*\mathbb{X}$ können wir $A_0 := \{a \in \mathbb{X} \mid {}^*a \in A\}$ betrachten. Die Menge A ist standard genau dann, wenn $A = {}^*A_0$ gilt.*

Bemerkung 2.3.3 *Jede Standardmenge $A \subseteq {}^*\mathbb{X}$ ist auch intern.*

Bemerkung 2.3.4 *Ist $A \subseteq {}^*\mathbb{X}$ eine interne Menge und $b \in A$ eine Menge, so ist auch b intern.*

Bemerkung 2.3.5 *Ist $f\colon (\mathbb{X} \backslash \mathbb{V}_0)^n \to \mathbb{X}$ eine Funktion, die Mengen als Argument nimmt (wie $\cup$, $\mathcal{P}$, etc.), so ist ${}^*f$ nur für interne Mengen von ${}^*\mathbb{X}$ definiert; wenn das Ergebnis eine Menge ist, ist diese auch intern.*

Bemerkung 2.3.6 *Ist $a \subseteq {}^*\mathbb{X}$ intern, so ist $({}^*\mathcal{P})(a) = \{b \subseteq a \mid b \text{ intern}\}$. Und: Die Formel „$\forall x \subseteq y$“ transferiert sich zu „$\forall x \subseteq {}^*y, x$ intern“.*

Satz 2.3.7 *Sei $A \subseteq {}^*\mathbb{V}_\ell^n$ für $\ell, n \geqslant 1$. Dann sind äquivalent:*

(a) *A ist intern*

(b) *Es gibt eine Formel $\phi(\underline{x}, y_1, \ldots, y_k)$ über $\mathbb{X}$ und Elemente $b_1, \ldots, b_k \in {}^*\mathbb{X}$, so dass $A = \{\underline{x} \in {}^*\mathbb{V}_\ell^n \mid {}^*\phi(\underline{x}, b_1, \ldots, b_k)\}$ ist.*

Lemma 2.3.8 *Jede endliche Teilmenge von ${}^*\mathbb{V}_\ell$ ist intern.*

Lemma 2.3.9 *Ist $A \subseteq \mathbb{X}$ unendlich, so ist $A' := \{{}^*a \mid a \in A\}$ extern.*

2.4 Hyperendliche Mengen

Definition 2.4.1 *Für $\ell \geqslant 1$ sei $\mathbb{V}_\ell^{\text{fin}} \subseteq \mathbb{V}_\ell$ die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{V}_{\ell-1}$. Elemente von $\bigcup_{\ell \geqslant 1} {}^*\mathbb{V}_\ell^{\text{fin}}$ heißen **hyper-endliche** (oder ***endliche** oder **pseudo-endliche**) Mengen.*

Bemerkung 2.4.2
(a) *Hyperendliche Mengen sind insbesondere intern.*
(b) *Eine Menge, die hyperendlich und standard ist, ist bereits endlich.*
(c) *Nichte jede Teilmenge einer hyperendlichen Menge ist hyperendlich, aber jede interne Teilmenge einer hyperendlichen Menge ist hyperendlich.*

Bemerkung 2.4.3 *Hyperendliche Mengen A verhalten sich in vielen Aspekten wie endliche Mengen, z. B.:*
(a) *Eine interne Abbildung $A \to A$ ist injektiv genau dann, wenn sie surjektiv ist.*
(b) *Ist $f\colon A \to {}^*\mathbb{R}$ intern, so hat f ein Minimum und ein Maximum auf A.*

Definition 2.4.4 *Für jede hyperendliche Menge A gibt es genau ein $N \in {}^*\mathbb{N}$, so dass es eine* interne *Bijektion $A \to \{1, \ldots, N\}$ gibt. Dieses N ist die **interne Kardinalität** von A (oder auch **Hyperkardinalität**). Notation dafür: ${}^*\#A$.*

Bemerkung 2.4.5 *Für hyperendliche Mengen A, B gilt:*
(a) *Sind A und B disjunkt, so ist ${}^*\#(A \cup B) = {}^*\#A + {}^*\#B$*
(b) *${}^*\#(A \times B) = {}^*\#A \cdot {}^*\#B$*
(c) *Ist $A \subseteq B$, so ist ${}^*\#A \leqslant {}^*\#B$.*
(d) *${}^*\mathcal{P}(A)$ ist auch hyperendlich, und es gilt ${}^*\#{}^*\mathcal{P}(A) = 2^{({}^*\#A)}$.*

Satz 2.4.6 *Ist A hyperendlich und $f\colon A \to \mathbb{R}$ intern, so sind $\sum_{a\in A} f(a)$ und $\prod_{a\in A} f(a)$ wohldefiniert.*

Satz 2.4.7 *Auf ${}^*\mathbb{N}$ kann man Funktionen rekursiv definieren: Ist X eine interne Menge, $x_0 \in X$ und $f\colon {}^*\mathbb{N} \times X \to X$ eine interne Funktion, so gibt es genau eine interne Funktion $g\colon {}^*\mathbb{N} \to X$ mit $g(0) = x_0$ und $g(n+1) = f(n+1, g(n))$.*

Beispiel 2.4.8 *Für interne $f\colon {}^*\mathbb{N} \to {}^*\mathbb{R}$ und $n \in {}^*\mathbb{N}$ ist die Summe $g(n) := \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} f(i)$ (aus Satz 2.4.6) eindeutig dadurch charakterisiert, dass g eine interne Funktion ist, die die erwartete rekursive Definition erfüllt: $g(0) = 0$ und $g(n+1) = g(n) + f(n+1)$. (Und analog für Produkte.)*

2.5 Mehr Analysis

Lemma 2.5.1 *Sei $X \subseteq \mathbb{V}_\ell$ eine Menge und $g, h\colon X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Dann sind äquivalent:*
(a) *Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt: Ist $g(x) < \delta$, so ist $h(x) < \epsilon$.*
(b) *Für alle $x \in {}^*X$ gilt: Ist $g(x) \in \operatorname{mon}(0)$, so ist $h(x) \in \operatorname{mon}(0)$.*

Definition 2.5.2 *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Eine **feine Zerlegung** des Intervals ${}^*[a, b] \subseteq {}^*\mathbb{R}$ ist eine hyperendliche Teilmenge $Z \subseteq {}^*[a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ ein $z \in Z$ existiert mit $x \simeq z$.*

Anwendung 2.5.3 (Zwischenwertsatz) *Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.*

Lemma 2.5.4 *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Dann ist f Riemann-integrierbar auf $[a,b]$, wenn für jede feine Zerlegung $(x_i)_{i\leqslant N}$ von $[a,b]$ die Summe $S := \sum_{i=1}^{N} {}^*f(x_i)(x_i - x_{i-1})$ endlich ist (also in ${}^*\mathbb{R}^{\mathrm{fin}}$ liegt) und $\mathrm{st}(S)$ nicht von der Wahl der feinen Zerlegung abhängt. In diesem Fall ist $\int_{[a,b]} f(x)dx = \mathrm{st}(S)$.*

Anwendung 2.5.5 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung) *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und sei $F(t) := \int_a^t f(x)dx$ für $t \in [a,b]$. Dann ist $F'(t) = f(t)$.*

3 Vergrößerungen

3.1 Vergrößerungen existieren

Definition 3.1.1 *Eine NS-Erweiterung ${}^*\mathbb{X}$ von $\mathbb{X}$ heißt **Vergrößerung**, wenn es für jede Menge $X \in \mathbb{X}$ eine hyperendliche Menge $Y \in {}^*\mathbb{X}$ gibt mit $\{{}^*x \mid x \in X\} \subseteq Y \subseteq {}^*X$.*

Satz 3.1.2 *Es gibt Vergrößerungen.*

Lemma 3.1.3 *Seien $A_i \subseteq \mathbb{V}_k$ Mengen (für $i \in I$), so dass für jede endliche Teilmenge $I_0 \subseteq I$ der Schnitt $\bigcap_{i\in I_0} A_i$ nicht leer ist. Dann ist $\bigcap_{i\in I} {}^*A_i \neq \varnothing$.*

3.2 Topologie

Wir nehmen weiterhin an, dass $\mathbb{X}$ die Superstruktur über $\mathbb{V}_0$ ist; ab jetzt sei aber ${}^*\mathbb{X}$ eine Vergrößerung von $\mathbb{X}$.

In diesem Abschnitt nehmen wir außerdem an, dass $X \subseteq \mathbb{V}_0$ ein topologischer Raum ist. Die Menge der offenen Teilmengen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$. ($\mathcal{T} \in \mathbb{V}_2$.)

Definition 3.2.1 *Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq {}^*X$ offen, wenn U eine Vereinigung von (beliebig vielen) Mengen aus ${}^*\mathcal{T}$ ist.*

Lemma 3.2.2 (a) *Definition 3.2.1 definiert eine Topologie auf ${}^*X$.*

(b) *Ist $U \subseteq {}^*X$ intern, so ist U offen genau dann, wenn $U \in {}^*\mathcal{T}$ ist. (Anders ausgedrückt: ${}^*\mathcal{T}$ ist genau die Menge der internen offenen Teilmengen von ${}^*X$.) Insbesondere gilt für $U \subseteq X$: U ist offen (in X) genau dann wenn ${}^*U$ offen (in ${}^*X$) ist.*

Lemma 3.2.3 *Ist $\mathrm{cl}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ die Abbildung, die eine Menge A auf ihren topologischen Abschluss $\bar{A}$ abbildet, so bildet auch ${}^*\mathrm{cl}$ jede interne Menge $A \subseteq {}^*X$ auf ihren topologischen Abschluss ab. Insbesondere ist der Abschluss von internen Mengen intern.*

Die analoge Aussage gilt auch für das innere von Mengen.

Definition 3.2.4 *Für $x \in X$ setze $\mathrm{mon}(x) := \bigcap {}^*U$, wobei U über alle offenen Umgebungen von x läuft.*

Lemma 3.2.5 *Zu jedem $x \in X$ existiert ein $V \in {}^*\mathcal{T}$ mit $x \in V \subseteq \mathrm{mon}(x)$.*

Lemma 3.2.6 (a) *Für $A \subseteq X$ und $x \in X$ gilt: $x \in \bar{A} \iff x \in \overline{{}^*A} \iff \mathrm{mon}(x) \cap {}^*A \neq \varnothing$.*

(b) *Für $A \subseteq X$ gilt: A ist offen $\iff$ $\operatorname{mon}(x) \subseteq {}^*A$ für alle $x \in A$.*
(c) *Ist $Y \subseteq \mathbb{V}_0$ ein weiterer topologischer Raum und $f\colon X \to Y$, so ist f stetig genau dann, wenn für alle $x \in X$ gilt: ${}^*f(\operatorname{mon}(x)) \subseteq \operatorname{mon}(f(x))$.*

Lemma 3.2.7 *X ist Hausdorff genau dann, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt: $\operatorname{mon}(x) \cap \operatorname{mon}(y) = \varnothing$.*

Definition 3.2.8 *Ein Punkt $x \in {}^*X$ heißt **standard-nah** („near-standard“) genau dann, wenn es ein $x' \in X$ gibt mit $x \in \operatorname{mon}(x')$.*

Lemma 3.2.9 *X ist kompakt genau dann wenn alle Punkte von ${}^*X$ standard-nah sind.*

Anwendung 3.2.10 *Stetige Funktikonen $f\colon X \to \mathbb{R}$ auf kompakten Räumen X nehmen ein Maximum an.*

Anwendung 3.2.11 *Ist X kompakt und $f\colon X \to Y$ stetig und surjektiv (wobei $Y \subseteq \mathbb{V}_0$ ein weiterer topologischer Raum ist), so ist Y kompakt.*

Seien $(X_i)_{i\in I}$ topologische Räume und sei $Y := \prod_{i\in I}$ das Produkt, mit der Produkttopologie: Basis-offene Mengen sind von der Form $\{(x_i)_{i\in I} \mid x_{i_1} \in U_1, \dots, x_{i_k} \in U_k\}$ für $U_j \subseteq X_{i_j}$ offen. Wir nehmen $I, X_i, Y \subseteq \mathbb{V}_0$ an.

Lemma 3.2.12 *Für $y = (x_i)_{i\in I} \in Y$ gilt:*

$$\operatorname{mon}(y) = \prod_{i\in I} \operatorname{mon}(x_i) \times \prod_{i\in {}^*I\setminus I} {}^*X_i$$

Anwendung 3.2.13 *Das Produkt von Hausdorff-Räumen ist wieder Hausdorff.*

Anwendung 3.2.14 (Tychonoff) *Das Produkt kompatker Räume ist kompakt.*

3.3 Anwendung auf Hilberträume

Lemma 3.3.1 *Ist $(a_i)_{i\in{}^*\mathbb{N}}$ eine interne Folge mit $a_i \in \operatorname{mon}(0)$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $N \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, so dass $a_i \in \operatorname{mon}(0)$ für alle $i < N$ gilt.*

Satz 3.3.2 *Sei H ein Hilbert-Raum über $\mathbb{C}$ und $T\colon H \to H$ ein beschränkter Operator (d. h. eine lineare Abbildung, die beschränkte Teilmengen auf beschränkte abbildet). Wir nehmen an, dass es ein Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ gibt, so dass $Q := f(T)$ kompakt ist (d. h. beschränkte Teilmengen von H auf kompakte abbildet). Dann gibt es einen nicht-trivialen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq H$ mit $T(U) \subseteq U$.*

Index