Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 1

Abgabe bis zum 21.4.2023, in der Vorlesung

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ (wie in Konvention 1.1.1) eine L-Struktur mit $L_{\mathrm{ord}} \subseteq L$, wobei $<$ eine total-Ordnung auf M ist. Zeigen Sie:

(a) Die Menge der stetigen Punkte einer definierbaren Funktion $f\colon M \to M$ ist definierbar; dies gilt auch uniform (im gleichen Sinn wie bei Lemma 1.1.3).

(b) Seien $X, Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen mit nicht-leerem Schnitt, die beide definierbar zusammenhängend sind. Zeigen Sie, dass dann auch die Vereinigung $X \cup Y$ definierbar zusammenhängend ist.

(c) Sind $a, b \in M$ zwei verschiedene (feste) Elemente, so gilt: Eine definierbare Menge $X \subseteq M^n$ ist definierbar zusammenhängend genau dann, wenn jede definierbare stetige Funktion $f\colon X \to \{a, b\}$ konstant ist.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Wir betrachten nun $\mathbb{R}$ als L-Struktur für eine beliebige Sprache $L \supseteq L_{\mathrm{ord}}$. Sei $\mathcal{M} \equiv \mathbb{R}$ (als L-Struktur). Eine Teilmenge $X \subseteq M$ heißt *konvex*, wenn für alle $a, b \in X$ mit $a < b$ gilt: $[a, b] \subseteq X$.

Zeigen Sie:

(a) Jede definierbar zusammenhängende Teilmenge von M ist konvex.

(b) Jede konvexe definierbare Teilmenge von M ist definierbar zusammenhängend.
Hinweis: Nehmen Sie das Gegenteil an und formulieren Sie eine geeignete L-Aussage, die in M wahr ist und in $\mathbb{R}$ einen Widerspruch dazu liefert, dass dort jede konvexe Menge zusammenhängend ist.

(c) Für definierbarte Teilmengen von $\mathbb{R}$ (oder von M) gilt: Definierbar zusammenhängend zu sein ist eine uniform definierbare Eigenschaft (im gleichen Sinn wie bei Lemma 1.1.4).