Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 11

Abgabe bis zum 30.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	2 (a)	2 (b)	2 (c)	2 (d)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Eine L-Theorie T ist modellvollständig genau dann, wenn für alle Modelle $\mathcal{M} \models T$ gilt:

Die $L(M)$-Theorie $T \cup \operatorname{Diag}(\mathcal{M})$ ist vollständig. Hierbei ist $\operatorname{Diag}(\mathcal{M})$ die Menge aller $L(M)$-Literale, die in $\mathcal{M}$ gelten.

Hinweis: Können Sie beschreiben, was die Modelle von $T \cup \operatorname{Diag}(\mathcal{M})$ sind?

Aufgabe 2 (2+2+2+3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir das Konzept „algebraisch abgeschlossen" bei Körpern abstrakt neu formulieren, so dass es sich auch auf andere Theorien anwenden lässt.[1]

Sei T eine Theorie. Ein **Modellbegleiter** von T ist eine Theorie T^* mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Modell von T lässt sich in ein Modell von T^* einbetten.
- Jedes Modell von T^* lässt sich in ein Modell von T einbetten.
- T^* ist modellvollständig.

(a) Zeigen Sie: Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper ist ein Modellbegleiter der Theorie der Körper. (Sie können Resultate aus dem letzten Semester verwenden, die sie, falls nötig, im Kurzskript nachschlagen können.)

(b) Zeigen Sie: Ist T^* ein Modellbegleiter von T, $\mathcal{M}^* \models T^*$ ein Modell und $\phi(\underline{x})$ eine quantorenfreie $L(M^*)$-Formel, die „in T erfüllbar" ist, so gilt bereits $\phi(\mathcal{M}^*) \neq \emptyset$. Mit „in T erfüllbar" ist gemeint: Es existiert ein Modell $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}^*$ von T mit $\phi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.

(c) Sei T die Theorie der angeordneten Mengen, in der Sprache $L = \{<\}$. Bestimmen Sie einen Modellbegleiter von T.

(d) Zeigen Sie: Eine Theorie T kann höchstens einen Modellbegleiter haben.
Hinweis: Konstruieren sie eine geeignete Kette von immer größer werdenden Modellen und nutzen Sie, die folgende Aussage, die Sie letztes Semester in einer Übungsaufgabe gezeigt hatten: Sind $\mathcal{M}_i$ Strukturen für $i \in \mathbb{N}$, mit $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \dots$, so gilt auch $\mathcal{M}_0 \prec \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_i$.

Vorlesungswebseite: https://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/OMin-V-S23/

[1] Wir machen hier was anderes als das „acl", das im Seminar vorkam.