O-Minimalität – Blatt 13

Abgabe bis zum 14.7.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)

Aufgabe 1 (2+3+3+2+2 Punkte):

Wir scheiben $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d}$ für die Menge all der Quasipolynome $q \in \mathbb{R}[x, e^x]$, die sich in der Form $q = \sum_{i=0}^{n} f_i e^{ix}$ schreiben lassen, wobei $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{R}[x]$ Polynome vom Grad höchstens d sind.

(a) Begründen Sie (unter Verwendung, dass $\mathbb{R}_{\mathrm{exp}}$ o-minimal ist), dass für jedes $n, d \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke existiert für die Anzahl der Nullstellen der Quasipolynome in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$.

Wir wollen nun im Rest der Aufgabe eine explizite solche Schranke finden. Dazu kopieren wir die Methoden aus dem Beweis von Lemma 3.2.13.

(b) Sei r eine (nur fast überall definierte) Funktion der Form $1 + (q(x)/f(x)) \cdot e^x$, für ein $q \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n,d}$ und ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$. Zeigen Sie, dass sich die Ableitung r' schreiben lässt in der Form $(\tilde{q}(x)/f(x)^2) \cdot e^x$, für ein Quasipolynom $\tilde{q} \in \mathbb{R}[x, e^x]_{n,d+\deg f}$.

(c) Zeigen Sie: Hat die Funktion $\tilde{q}$ aus (b) m Nullstellen, so hat r höchstens $m + 1 + \deg f$ Nullstellen.

(d) Geben Sie eine Formel an, mit der man eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen von Quasipolynomen in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$ erhalten kann, wenn man bereits eine Schranke für die Anzahl der Nullstellen von Quasipolynomen in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n-1,d'} \setminus \{0\}$ kennt, für ein geeignetes d'.
Hinweis: Jedes Quasipolynom lässt sich schreiben als Produkt eines Polynoms, einer Funktion der Form r aus (b) und einem Faktor der Form e^{kx}.

(e) Folgern Sie, dass ein Quasipolynom in $\mathbb{R}[x, e^x]_{n,d} \setminus \{0\}$ höchstens $(3 \cdot 2^n - 2)d + n$ Nullstellen hat.