Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 4

Abgabe bis zum 12.5.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (4+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale angeordnete Gruppe (in einer Sprache $L \supseteq L_{\text{oag}}$. In der folgenden Aufgabe soll Zellzerlegung nicht verwendet werden:

(a) Sei $X \subseteq M^n \times M^k$ definierbar, und sei $\pi\colon M^n \times M^k \to M^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten. Zeigen Sie, dass eine definierbare Funktion $f\colon \pi(X) \to M^k$ existiert, deren Graph eine Teilmenge von X ist.
(Anmerkung: Man nennt f eine definierbare Skolemfunktion für X.)
Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $k = 1$.

(b) Folgern Sie: Ist $X \subseteq M^n$ eine unendliche Menge, so enthält X bereits eine definierbare Kurve, d. h. es existiert eine definierbare injektive stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq M$ nach C.

Aufgabe 2 (2+3+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein o-minimaler angeordneter Ring (in einer Sprache $L \supseteq L_{\text{oring}}$). Zeigen Sie:

(a) Ist $(a, b) \subseteq M$ ein offenes Intervall (für $a, b \in M_\infty$), so existiert ein definierbarer Homöomorphismus $f\colon (0, 1) \to (a, b)$. Und: Sind a und/oder b nicht $\pm\infty$, so ist f uniform in den Parametern a und/oder b definierbar.

(b) Jede Zelle $C \subseteq M^n$ definierbar homöomorph zu $(0, 1)^d$, für ein geeignetes d.

(c) Jede Zelle $C \subseteq M^n$ definierbar wegzusammenhängend, d. h. für je zwei Punkte $a, b \in C$ existiert eine definierbare stetige Abbildung $f\colon [0, 1] \to C$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$.