Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 9

Abgabe bis zum 16.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (3+3 Punkte):

Sei $f\colon X \to Y$ definierbar.

(a) Zeigen Sie, dass Stetigkeit entlang von Kurven geprüft werden kann, d. h. f ist stetig an einem Punkt $\underline{a} \in X$ genau dann, wenn für alle stetigen definierbaren Funktionen $\gamma\colon (0, \epsilon) \to X$ mit $\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \underline{a}$ gilt: $\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = f(\underline{a})$.
Hinweis: Wenn f nicht stetig ist, findet man ein Gegenbeispiel-γ ähnlich wie im Beweis von Kurvenauswahl.

(b) Wir nehmen nun an, dass X beschränkt und abgeschlossen ist und f stetig. Zeigen Sie, dass f dann bereits uniform stetig ist.
Hinweis: Wenn nicht, kann man ein $\gamma\colon (0, \epsilon) \to X$ konstruieren, das der Stetigkeit von f (mit Teil (a)) widerspricht. (Wieso ist $\lim_{t\to 0} \gamma(t)$ automatisch in X?)

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Sei $X \subseteq M^n$ definierbar, beschränkt und abgeschlossen, sei $f\colon X \to M^m$ definierbar und stetig, und sei $Y := f(X)$.

(a) Eine definierbare Teilmenge $Z \subseteq Y$ ist abgeschlossen genau dann, wenn ihr Urbild $f^{-1}(Z)$ abgeschlossen ist.

(b) Ist f injektiv, so ist f bereits ein Homöomorphismus von X nach Y.

(c) Eine definierbare Abbildung $g\colon Y \to M^k$ ist stetig genau dann, wenn die Verknüpfung $g \circ f$ stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 2.5.5. (Erinnern Sie sich auch daran: Eine Abbildung ist stetig genau dann, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.)