O-Minimalität – Blatt 11

Abgabe bis zum 30.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	2 (a)	2 (b)	2 (c)	2 (d)

Aufgabe 1 (3 Punkte):

Zeigen Sie: Eine L-Theorie T ist modellvollständig genau dann, wenn für alle Modelle $\mathcal{M} \models T$ gilt:

Die $L(M)$-Theorie $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$ ist vollständig. Hierbei ist $\mathrm{Diag}(\mathcal{M})$ die Menge aller $L(M)$-Literale, die in $\mathcal{M}$ gelten.

Hinweis: Können Sie beschreiben, was die Modelle von $T \cup \mathrm{Diag}(\mathcal{M})$ sind?

Aufgabe 2 (2+2+2+3 Punkte):

In dieser Aufgabe wollen wir das Konzept „algebraisch abgeschlossen“ bei Körpern abstrakt neu formulieren, so dass es sich auch auf andere Theorien anwenden lässt.[1]

Sei T eine Theorie. Ein **Modellbegleiter** von T ist eine Theorie T^* mit folgenden Eigenschaften:

- Jedes Modell von T lässt sich in ein Modell von T^* einbetten.
- Jedes Modell von T^* lässt sich in ein Modell von T einbetten.
- T^* ist modellvollständig.

(a) Zeigen Sie: Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper ist ein Modellbegleiter der Theorie der Körper. (Sie können Resultate aus dem letzten Semester verwenden, die sie, falls nötig, im Kurzskript nachschlagen können.)

(b) Zeigen Sie: Ist T^* ein Modellbegleiter von T, $\mathcal{M}^* \models T^*$ ein Modell und $\phi(\underline{x})$ eine quantorenfreie $L(M^*)$-Formel, die „in T erfüllbar“ ist, so gilt bereits $\phi(\mathcal{M}^*) \neq \emptyset$. Mit „in T erfüllbar“ ist gemeint: Es existiert ein Modell $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}^*$ von T mit $\phi(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.

(c) Sei T die Theorie der angeordneten Mengen, in der Sprache $L = \{<\}$. Bestimmen Sie einen Modellbegleiter von T.

(d) Zeigen Sie: Eine Theorie T kann höchstens einen Modellbegleiter haben.
Hinweis: Konstruieren sie eine geeignete Kette von immer größer werdenden Modellen und nutzen Sie, die folgende Aussage, die Sie letztes Semester in einer Übungsaufgabe gezeigt hatten: Sind $\mathcal{M}_i$ Strukturen für $i \in \mathbb{N}$, mit $\mathcal{M}_0 \prec \mathcal{M}_1 \prec \mathcal{M}_2 \prec \dots$, so gilt auch $\mathcal{M}_0 \prec \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_i$.

Vorlesungswebseite: https://www.math.uni-duesseldorf.de/~internet/OMin-V-S23/

[1] Wir machen hier was anderes als das „acl“, das im Seminar vorkam.

T is Model complete $\iff$ $T \cup Diag(M)$ is complete.

Let T be a model complete

$M \subseteq N \implies M \preceq N$

$T \cup Diag(M)$ is not complete, then there exist $\varphi \in L(M)$-Sentnces

Such that $T \cup Diag(M) \cup \{\varphi\}$ and $T \cup Diag(M) \cup \{\neg\varphi\}$ are consistent.

$\varphi \in L(M)$

$N_1 \models T \cup Diag(M) \cup \{\varphi\}$ $\implies N_1, N_2 \models Diag(M) \implies M$ embedded in N_1, N_2.

$N_2 \models T \cup Diag(M) \cup \{\neg\varphi\}$ w.l. assume $M \subseteq N_1, N_2 \implies M \preceq N_1, N_2$

$N_1 \models \varphi$, $N_2 \models \neg\varphi$ $\implies M \models \varphi \wedge \neg\varphi$ contradiction.

$T \cup Diag(M)$ is complete $\implies$ T is model complete.

$M_0 \subseteq M \models T$, $M_0 \vdash T \cup Diag(M)$

$\varphi \in L(M_0)$ - existential formula.

$M \models \varphi = \exists x \ \psi(x, \bar{m})$ $\implies$ there exist $\bar{m} \in M$ $\varphi(\bar{m}_0, \bar{m}) \in Diag(M)$

$\bar{m} \in M_0$

$\implies M_0 \models \exists x \ \psi(x, \bar{m})$.

Auf 2.a) ACF is a model companion for theory of fields.

$\underbrace{}_{}$ $\widetilde{\text{th}}$(Field).

Let $F \models ACF \Rightarrow F \models Th(\text{field})$.

If $F \models Th(\text{field}) \Rightarrow F^{alg} \models ACF \Rightarrow F \subseteq F^{alg}$

ACF is model complete by QE.

Auf 2.b)

$M^* \models T^*$ $\quad M^* \subseteq M \models T \quad \varphi(M) \neq \emptyset$

$\downarrow$ model complete.

$\exists M^{**} \models T^* \quad M^* \subseteq M \subseteq M^{**}$

$M^* \preceq M^{**}$ (by model completeness)

qf $- L(M^*)$

$\varphi(M) \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(M^{**}) \neq \emptyset$

$M^* \prec M^{**}$

$\varphi(M^{**}) \neq \emptyset$

$M^{**} \models \exists x \; \varphi(x)$

$\Rightarrow M^* \models \exists x \; \varphi(x) \Rightarrow \varphi(M^*) \neq \emptyset$

e) T = theory of ordered set = Ord.

$T^* = DLO$

As DLO has QE then model complete.

If $M \models DLO \Rightarrow M \models Ord$.

If $M \models Ord$

consider $T = Diag(M) \cup \{\forall x,y\, \exists z \quad x<z<y\}$

$\cup \{\forall x\, \exists y \quad x<y\} \cup \{\forall x\, \exists y \quad y<x\}$

Clearly this theory is finitly satisfiable, then By compactness, it has a model N,

$N \models Diag(M) \Rightarrow M \subseteq N$

$N \models DLO$

Auf 2. d) Let T_1, T_2 be model companion of T

$M_1 \models T_1$ it embeds into model N_1 of T_2, which embeds into model M_2 of T_1, etc.

we get the chain $M_1 \subseteq N_1 \subseteq M_2 \subseteq N_2 \subseteq \dots$

As T_1 is model complete then chain of M_i is an elementry chain.

— T_2 ——— " —— N_i —— " ——— .

$$\Rightarrow \quad N_1 \preccurlyeq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \vdash T_1 \qquad \Rightarrow \quad T_1, T_2 \text{ have the same model then } T_1 = T_2.$$

$$M_1 \preccurlyeq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i \vdash T_2$$