Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 12

Abgabe bis zum 7.7.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)

Aufgabe 1 (3+3+3+2+1 Punkte):

Seien $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ Modelle von $\mathbb{R}_{\exp}$ (wie in der Vorlesung) und seien $q_1, \dots, q_m \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ Quasipolynome, für $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Sei $\underline{q} = (q_1, \dots, q_m)$. Wir nehmen $m \leq n$ an.

Manchmal würde man sich wünschen, dass $V(\underline{q}) = V^{\mathrm{reg}}(\underline{q})$ gilt. (Dies wäre im allgemeinen Beweis von Lemma 3.2.10 nützlich.) In dieser Aufgabe wollen wir einen Ersatz dafür erhalten. Dabei wird man auch sehen, woher die zusätzlichen Variablen kommen, die in der Aussage von Lemma 3.2.10 auftauchen.

(a) Zeigen Sie, dass Quasipolynome $r_1, \dots, r_\ell \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ existieren, so dass für $\underline{a} \in V(\underline{q})$ gilt: $\underline{a} \in V^{\mathrm{reg}}(\underline{q})$ genau dann, wenn $r_1(\underline{a}) \neq 0 \wedge \dots r_\ell(\underline{a}) \neq 0$.
Hinweis: Eine $(m \times n)$-Matrix hat Rang m genau dann, wenn jede $m \times m$-Untermatrix Rang m hat, also invertierbar ist, also Determinante $\neq 0$ hat.

(b) Zeigen Sie, dass ein einziges Quasipolynom $\tilde{q}_0 \in M_0[\underline{x}, y, e^{\underline{x}}, e^y]$ existiert, so dass für $\underline{a} \in V(\underline{q})$ gilt: $\underline{a} \in V^{\mathrm{reg}}(\underline{q})$ genau dann, wenn ein $b \in M$ existiert mit $\tilde{q}_0(\underline{a}, b) = 0$ ist.
Hinweis: Verwenden Sie (a) und Ideen aus dem Beweis von Lemma 3.2.6.

(c) Zeigen Sie, dass man, wenn man $\tilde{q}_0$ in (b) geeignet wählt, zusätzlich erreichen kann, dass folgendes gilt: Ist $(\underline{a}, b) \in V(\tilde{q}_0)$ so, dass $\underline{a} \in V(\underline{q})$ ist, so ist $\frac{\partial}{\partial y}\tilde{q}_0(\underline{a}, b) \neq 0$.
Hinweis: Wenn Sie bei (b) Ihr $\tilde{q}_0$ so gewählt haben, wie es der Beweis von Lemma 3.2.6 suggeriert, dann sollte dieses $\tilde{q}_0$ die zusätzliche Eigenschaft bereits haben.

(d) Wir schreiben jetzt $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_n \in M_0[\underline{x}, y, e^{\underline{x}}, e^y]$ für $q_1, \dots, q_n$, aufgefasst als Quasipolynome in einer zusätzlichen Variablen y. (Und $\tilde{q}_0$ ist das Polynom aus (c).)
Zeigen Sie: $V(\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n) = V^{\mathrm{reg}}(\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n)$.
Hinweis: Benutzen Sie (c).

(e) Zeigen Sie: Ist $\pi\colon M^{n+1} \to M$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten, so gilt $\pi(V^{\mathrm{reg}}(\tilde{q}_0, \dots, \tilde{q}_n)) = V^{\mathrm{reg}}(q_1, \dots, q_n)$.

Anders ausgedrückt: Wir konnten zwar nicht direkt für $V(\underline{q}) = V^{\mathrm{reg}}(\underline{q})$ sorgen, aber wir konnten $V^{\mathrm{reg}}(\underline{q})$ als Projektion eines $V(\underline{\tilde{q}}) = V^{\mathrm{reg}}(\underline{\tilde{q}})$ schreiben.

(a) $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_m) \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ $\quad x = (x_1, \ldots, x_n)$

$\underline{a} \in V(\underline{q}) \Rightarrow$ (

$\underline{a} \in V^{reg}(q) = \{ a \in V(\underline{q}) \mid \underbrace{rk(D\underline{q})(\underline{a}) = m}\}$

$\Leftrightarrow$ determinant of all $m \times m$ sub-matrices are non-zero

As determinant is a Polynomial, we named them as

$r_1, \ldots, r_l \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$

by definition, it's clear that

$$\underline{a} \in V^{reg}(\underline{q}) \Leftrightarrow r_1(\underline{a}) \neq 0 \wedge \ldots \wedge r_l(\underline{a}) \neq 0$$

$$\underline{q_0(\underline{x}, y)} = \left(\sum_{i=1}^{l} r_i^2(\underline{x})\right) \cdot y - 1$$

b) $\varphi(\underline{x}, y) = \exists y \left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2(\underline{x})\right) \cdot y = 1$

$M \models \exists y \, \varphi(\underline{a}, y) \Leftrightarrow \underline{a} \in V^{reg}(q)$

$\Leftrightarrow$ there exist $b \in M$ s.t $q_0(\underline{a}, b) = 0$

c) $(\underline{a}, b) \in V(\tilde{q}_0) \Rightarrow \underline{a} \in V(q_0)$ $\qquad \frac{\partial}{\partial y} \tilde{q}_0(\underline{a}, b) \neq 0$

$$\frac{\partial \tilde{q}_0}{\partial y}(\underline{a}, b) = \sum_{i=1}^{l} r_i^2(\underline{a}) \neq 0$$

d) $\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n \in M_0[\underline{x}, y, e^{\underline{x}}, e^{y}]$ for $q_1, \ldots, q_n$ $\qquad \underline{a} \in V(\underline{q})$

$(\underline{a}, b) \in V(\underbrace{\tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_n}_{\tilde{\underline{q}}})$ $\qquad \underline{a} \in V(\underline{q})$,

by (c) It's clear that $rk\left(D\tilde{\underline{q}}(\underline{a}, b)\right) = n$

$\Rightarrow \quad (\underline{a}, b) \in V^{reg}(\tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_n)$

$V^{reg}(\tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_n) \subseteq V_0(\tilde{q}_0, \ldots, \tilde{q}_n)$

e) $\pi : M^{n+1} \longrightarrow M$

$\pi\left(V^{reg}\left((\tilde{q}_0, \tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_n)\right)\right) = V^{reg}(q_1, \ldots, q_n)$

by definition $(\underline{a}, b) \in V^{reg}(\tilde{q}_0, \ldots \tilde{q}_n)$ $\quad \underline{a} \in V^{reg}(q)$