Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 2

Abgabe bis zum 28.4.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Auf dem gesamten Aufgabenblatt sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte):

(a) Zeigen Sie: Die Eigenschaft, dass eine definierbare Menge $X \subseteq M$ definierbar zusammenhängend ist, ist uniform definierbar.
(Anmerkung: Dies ist auch für definierbare Teilmengen von M^n wahr; das werden wir jedoch erst später in der Vorlesung beweisen können.)

(b) Wir wollen nun prüfen, dass die Eigenschaft, zusammenhängend zu sein (im normalen topologischen Sinn), im Allgemeinen nicht uniform definierbar ist, selbst wenn wir uns auf ein festes Modell beschränken. Genauer: Geben Sie ein Modell $\mathcal{M}$ von DLO an und ein Element $a \in M$, so dass die Menge

$$\{b \in M \mid b > a \text{ und das Intervall } (a, b) \text{ ist zusammenhängend}\}$$

nicht definierbar ist.

(c) Zeigen Sie: Die Eigenschaft, dass eine definierbare Menge $X \subseteq M$ endlich ist, ist uniform definierbar.
Hinweis: Für definierbare Teilmengen einer o-minimalen Struktur gibt es eine andere Art, Endlichkeit zu charakterisieren.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Sei $f\colon M \to M$ definierbar und beschränkt. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existiert. Zeigen Sie dazu:

(a) Für jedes $b \in M$ existiert ein $x_0 \in M$, so dass gilt: $f(x) - b$ hat für alle $x > x_0$ das gleiche Vorzeichen ($-$, 0 oder $+$).

(b) Die Menge

$$Y := \{b \in M \mid f(x) - b \text{ ist positiv für alle hinreichend großen } x\}$$

ist definierbar.

(c) Begründen Sie, dass $\sup Y$ existiert und zeigen Sie, dass $\sup Y = \lim_{x\to+\infty} f(x)$ ist.

Auf (1) (a) $X \subseteq M$ is definable set such that $X = \varphi(M, \underline{b})$ then for $\underline{b} \in M^n$

$X = \{a_1, \dots, a_n\} \cup \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j)$

If $X \subseteq M$ is def_connected then X must be an interval.

therefor we have

$M \models \exists y, z \; \forall x \qquad \varphi(x, \underline{b}) \longleftrightarrow y < x < z$

so If $M \equiv M'$ and $\underline{b}' \in M'$ $\varphi(M', \underline{b}') \neq \emptyset \Rightarrow \varphi(M', \underline{b}')$ is def_connected.

Auf 1.b) Put $M = \mathbb{Q} \cup (0, \sqrt{2}) \models DLO$

$(0, b)$ is connected if and only if $b \leq \sqrt{2}$

but $\{b \mid b \leq \sqrt{2}\}$ is not definable.

Let $\varphi(x, b) = 0 < x < b$

connectedness uniformly definable means that there exist $\varphi(y)$ such that.

$\forall b \quad \psi(b)$ in $\Leftrightarrow$ $\varphi(M, b)$ is connected.

each model of DLO

if this property was true, the above set had to be true.

but we saw that in M, this set is not definable. ▨

Auf 1.c) X is infinite $\iff$ X contains an open interval

Let X is defined by $\varphi(x, \underline{d})$ $\underline{d} \in M^n$ then

$M \models \chi(\underline{d}) := \forall a, b \ \exists x \quad a < x < b \wedge \neg\varphi(x, \underline{d}) \iff$ " X is finite "

Auf 2.a) fix $b \in M$, put
$$A_0 = \{x \in M \mid f(x) - b > 0\}$$
$$A_1 = \{x \in M \mid f(x) - b < 0\}$$
$$A_2 = \{x \in M \mid f(x) - b = 0\}$$

Since f is definable, all of these sets are definable too.

As M is o-minimal, all of these set are finite union of points and intervals.

It's clear that $M = A_0 \cup A_1 \cup A_2$ and these sets are pairwise disjoint.

this implies that $\exists\, 0 \leq i \leq 2 : \sup A_i = +\infty$ w.l assume $i = 0$

there for there exist x_0 such that $\forall x > x_0 \quad f(x) > 0$.

$(x_0 > \max\{\sup A_1, \sup A_2\})$

Auf 2.b)

$$\theta(b) := \exists x_0 \forall x \ \ x > x_0 \longrightarrow [\forall y \ \varphi(x, y) \longrightarrow y - b > 0]$$

Auf 2.c)

Put $\sup(Y)=\alpha$ for each $\varepsilon>0$ consider $I=(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)$ we want to find x_ε such that for all $x>x_\varepsilon$ $f(x)\in I$.

Since α is $\sup Y$ than there exist $b_\varepsilon\in Y$, $\alpha-\varepsilon<b_\varepsilon<\alpha$

$b_\varepsilon\in Y \Rightarrow \exists x_0 \ \forall x>x_0 \quad f(x)-b_\varepsilon>0$

$\Rightarrow \alpha-\varepsilon<b_\varepsilon<f(x)<\alpha$ (*)

apply part (a) for $\alpha+\varepsilon \Rightarrow$

case 1) $\exists x_0' \ \forall x>x_0' \quad f(x)-(\alpha+\varepsilon)>0 \Rightarrow \alpha+\varepsilon\in Y$, It's contradiction with $\sup Y=\alpha$

case 2) $\exists x_0' \ \forall x>x_0' \quad f(x)-(\alpha+\varepsilon)=0 \Rightarrow \forall x>x_0 \quad f(x)-\alpha+\varepsilon/2>0$

$\Rightarrow \alpha+\varepsilon/2\in Y$ It's in contradiction with $\sup Y=\alpha$

(**)

$\Rightarrow \exists x_0' \ \forall x>x_0' \quad f(x)-(\alpha+\varepsilon)<0 \Rightarrow f(x)<\alpha+\varepsilon$

$\Rightarrow \forall x>\max\{x_0,x_0'\} \quad \alpha-\varepsilon<f(x)<\alpha+\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\sup(Y)$

(*) (**)