Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 3

Abgabe bis zum 5.5.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (1+4+1 Punkte):

In dieser Aufgabe sei K ein angeordneter Körper und T die Theorie der nicht-trivialen angeordneten K-Vektorräume, in der Sprache $L := L_{K\text{-VR}} \cup L_{\mathrm{ord}} = \{0, +, -, <\} \cup \{r\cdot \mid r \in K\}$.

(a) Zeigen Sie, dass jedes Modell von T insbesondere ein Modell von DLO ist (also eine dichte lineare Menge ohne Endpunkte).

(b) Zeigen Sie Satz 1.2.11: T hat Quantoren-Elimination.
Anmerkung: Mit Hilfe von (a) können Sie ein paar Argumente aus dem Beweis von Quantoren-Elimination für DLO klauen.

(c) Folgern Sie Korollar 1.2.12: T ist o-minimal.

Aufgabe 2 (2+2+2 Punkte):

Zeigen Sie (mit Hilfe des Monotonie-Satzes):

(a) Der Graph einer definierbaren Funktion $f : M \to M$ besteht aus endlich vielen definierbaren Zusammenhangskomponenten.

(b) Ist $f : [a, b] \to M$ stetig und definierbar, so nimmt f ein Maximum an.

(c) Es gibt keine definierbare Funktion $f : M \to M^2$, deren Bild ein ganzes Rechteck $(a, b) \times (a', b')$ enthält.

Auf 2.a) $f: M \longrightarrow M$ is definable function.

$\Rightarrow \quad \exists \; -\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = +\infty \quad f|_{(a_{i-1}, a_i)}$ is

constant or continuous and strictly monoton.

* Image of definably connected set, under definable continuous function is definable connected.

As definable connected subset of M (non-trivial) is an Intervals so

graph(f) is finite union of $(a,b) \times (f(a), f(b))$ or $\{c\} \times (a,b)$

both are definably connected.

Auf 2.b) $f: [a,b] \longrightarrow M$ by monotonocity theorem, there exist $a_0 < a_1 < \dots < a_n$

such that $f|_{(a_{i-1}, a_i)}$ is constant or strictly monoton.

$\Rightarrow$

$$\max(f) = \max\left(\{f(a_i)\}_{i=1}^{n}\right) \cup \left\{\left(\lim_{x \to a_i^{\pm}} f(x)\right)\right\}\Big)$$

$f : M \longrightarrow M^2$ definable

$(a,b) \times (a',b') \subseteq f(M)$

Let $x \in (a,b)$ $A_x := f^{-1}(\{x\} \times (a',b')) = \{m \in M \mid \exists y \in (a',b') \ f(m) = (x,y)\}$

A_x is definable.

$\circledast$ $x \neq x' \Rightarrow A_x \neq A_{x'}$ (otherwise there exists $d \in A_x \cap A_{x'}$ such that
$f(d) = (x, y_d) = (x', y'_d)$
$\Rightarrow x = x'$ $\times$)

A_x is finite union of points and intervals.
$f^{-1}((a,b) \times (a',b'))$ is definable, hence it's finite union of points and intervals.

but $f^{-1}((a,b) \times (a',b')) = \bigcup_{a<x<b} A_x$ $\times$ (because $\circledast$)

Anf 1. note that:

(1) ordered field has charcteristic zero

(2) this implies that M is divisible, as an abelian group. this implies that the order is a DLO.

Proof: similar to proof of QE for divisible ordered abelian groups:

It's enough to eliminate existential quantifier of $\psi(\underline{x}) = \exists x_0 \bigwedge_i \varphi_i(x_0, \underline{x})$ where φ is linear. which w.l, of the forms of $\sum_{j=0}^{n} r_j x_j \;\square\; 0$, $\square \in \{>, =, <\}$

w.l. we can assume $r_0 = 1$ (otherwise multiple to a factor
Now, w.l we can assume $r_0 \neq 0$ (otherwise pull it out).

now rewrite φ_i as $x_0 \;\square\; t_i$ where each t_i is a term of the form $\sum_{j=1}^{n} r_j x_j$

If there is an equality (literal with an equality) then use this to subtitude in others.

otherwise, finish as in the proof for DLO:

$\psi(\underline{x})$ is of the form of $\exists x_0 \bigwedge_{i \in I} x_0 > t_i \wedge \bigwedge x_0 < t_j$

this equivalent to $\bigwedge_{i,j} t_i < t_j$