Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

O-Minimalität – Blatt 4

Abgabe bis zum 12.5.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	2 (a)	2 (b)	2 (c)

Aufgabe 1 (4+2 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale angeordnete Gruppe (in einer Sprache $L \supseteq L_{\mathrm{oag}}$. In der folgenden Aufgabe soll Zellzerlegung nicht verwendet werden:

(a) Sei $X \subseteq M^n \times M^k$ definierbar, und sei $\pi\colon M^n \times M^k \to M^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten. Zeigen Sie, dass eine definierbare Funktion $f\colon \pi(X) \subseteq M^n \to M^k$ existiert, deren Graph eine Teilmenge von X ist.
(Anmerkung: Man nennt f eine definierbare Skolemfunktion für X.)
Hinweis: Zeigen Sie zunächst den Fall $k = 1$.

(b) Folgern Sie: Ist $X \subseteq M^n$ eine unendliche Menge, so enthält X bereits eine definierbare Kurve, d. h. es existiert eine definierbare injektive stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Intervall $I \subseteq M$ nach C.

Aufgabe 2 (2+3+1 Punkte):

Sei $\mathcal{M}$ ein o-minimaler angeordneter Ring (in einer Sprache $L \supseteq L_{\mathrm{oring}}$). Zeigen Sie:

(a) Ist $(a, b) \subseteq M$ ein offenes Intervall (für $a, b \in M_\infty$), so existiert ein definierbarer Homöomorphismus $f\colon (0, 1) \to (a, b)$. Und: Sind a und/oder b nicht $\pm\infty$, so ist f uniform in den Parametern a und/oder b definierbar.

(b) Jede Zelle $C \subseteq M^n$ definierbar homöomorph zu $(0, 1)^d$, für ein geeignetes d.

(c) Jede Zelle $C \subseteq M^n$ definierbar wegzusammenhängend, d. h. für je zwei Punkte $a, b \in C$ existiert eine definierbare stetige Abbildung $f\colon [0, 1] \to C$ mit $f(0) = a$ und $f(1) = b$.

Definable Selection: $1 \in M$ is positive fixed element.

$X \subseteq M^n \times M^k$ $\exists f: \pi(X) \to M^k$ such that for all $x \in \pi(X)$, $(x, f(x)) \in X$

Idea: we need to prove that we can definably choose a point from each section X_x $x \in M^k$

So we want pick definably point from a definable set; If X is a bounded interval, it's mid point.

$k=1$ $X \subseteq M^n \times M$ for $x \in \pi(X)$, put $X_x \subseteq M$, fiber of X on x.

Let $X_x \neq \phi$

$f(x) =$ least element of X_x

otherwise

consider (a,b) $a = \inf(X_x)$ and $b = \sup\{x' \in X_x \mid (a,x) \subset X\}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } a=-\infty,\ b=+\infty \\ a+1 & \text{if } a \in M,\ b=+\infty \\ b-1 & \text{if } a=-\infty\ \ b \in M \\ \frac{a+b}{2} & a,b \in M \end{cases}$$

which is indeed a definable section.

the general case follows by decompositing the projection

$M^{n+k} \longrightarrow M^{m+k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow M^{k+1} \longrightarrow M$

choose $a \in cl(X) \setminus X$ $|X| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

Auf 1.b)

consider

$$Y = \{(t,x) \in M \times X \mid |a-x| = t\} \subseteq M$$

contains arbitarily small positive elements. $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$: $(0,\varepsilon) \subseteq Y$

for $t \in (0,\varepsilon)$, there is $x \in X$ with $|a-x| = t$

by definable choice there is $f: (0,\varepsilon) \to X$ such that.

$(t, f(t)) \in Y$ $\left(|a - f(t)| = t \quad \forall t \in (0,\varepsilon)\right)$

by monotonocity theorem (decrese ε if neccessary).

f is continuous and clearly injective. ∎

Auf 2. a) By theorem 1.3.4 M is Real closed field.

C is definably homeomorphic to $(0,1)^d$.

By Lemma 2.2.5 we can assume $d=n$.

we proceed by induction on n.

for case of $n=0$, $n=1$, the problem is trivial. (cells are singel point or intervals)

for $C=(a,b)$ $\quad f:(a,b)\longrightarrow(0,1)$

$$x\longmapsto\frac{x-a}{b-a}$$

Now suppose $n>1$ and our claim is true for $n-1$

Let C be a $(i_1,i_2,\dots,i_n)$-cell of M^n

$\Rightarrow$ there exist $(i_1,\dots,i_{n-1})$-cell D of M^{n-1}

case 1: $\underline{i_n=1}$: exist two function f,g such that, C is $(\bar a,b)$ in M^n where $\bar a\in D$ and $f(\bar a)<b<g(\bar a)$

Now by induction assumption, there is a definable homeomorphism $h: D\longrightarrow[0,1]^{n-1}$ if both f,g take their values in M, then

$$(\bar a,b)\longrightarrow\underbrace{\left(h(\bar a),\frac{b-f(\bar a)}{g(\bar a)-f(\bar a)}\right)}_{\in(0,1)^n}\quad\forall(\bar a,b)\in C$$

case 2: $i_n=1$ exist function f such that $C=\{(\bar a,f(\bar a))\mid \underline{a}\in D\}$

as $h: D\longrightarrow[0,1]^{n-1}$;

$$C\longrightarrow[0,1]^n$$
$$(\bar a,b)\longrightarrow(h(\bar a),f(b)).$$

* Remark: M is a cell and is homeomorph with $(0,1)$ so without loss we can take value of f in $(0,1)$ (whenever take its value in M).

Auf 2.b) C is path connected. (M is RCF).

Proceed by induction on n:

for $n=1 \longrightarrow C=(a,b)$ which is clearly path connected via linear map. (as it can be done in $\mathbb{R}$).

Now assume, the claim is true for $n-1$:

C is $(i_1, i_2, ..., i_n)$- cell;

Case 1. $i_n = 1$ exist two function f, g such that, C is $(\bar{a}, b)$ in M^n where $\bar{a} \in D$ and $f(\bar{a}) < b < g(\bar{a})$

by induction assumption. D is path connected.

take $(\bar{a}, b)$, $(\bar{a}', b') \in C$ such that $f(\bar{a}) < b < g(\bar{a})$
$f(\bar{a}') < b' < g(\bar{a}')$

$\exists\ h: (0,1) \longrightarrow D$

$h(0) = \bar{a}$ $h(1) = \bar{a}$

we first connect $(\bar{a}, b)$ by a vertical path to $\left(\underline{a}, \frac{f(\bar{a}) + g(\bar{a})}{2}\right)$

h connect $\underline{a}$ to $\underline{a}'$ and this path can be lifted to a path in C.

by $h': [0,1] \longrightarrow C$ $h'(t) = \left(h(t), \frac{f(h(t)) + g(h(t))}{2}\right)$

which connect $\left(\bar{a}, \frac{f(\bar{a}) + g(\bar{a})}{2}\right)$ to $\left(\bar{a}', \frac{f(\bar{a}') + g(\bar{a}')}{2}\right)$.

Now, connect $\left(\bar{a}', \frac{f(\bar{a}') + g(\bar{a}')}{2}\right)$ to (a', b) via vertical path.

- Case 2; $i_n = 0$: easy.