O-Minimalität – Blatt 5

Abgabe bis zum 19.5.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	2 (a)

Aufgabe 1 (2+3+2 Punkte):

Sind $\underline{C} := (C_1, \ldots, C_n)$ und $\underline{C}' := (C'_1, \ldots, C'_{n'})$ Zellzerlegungen von M^n, so nennt man $\underline{C}'$ eine *Verfeinerung* von $\underline{C}$, wenn jede Zelle C_i sich als Vereinigung von manchen der Zellen C'_j schreiben lässt.

Zeigen Sie (unter Verwendung der Zellzerlegungssätze):

(a) Zu zwei beliebigen Zellzerlegungen $\underline{C}$ und $\underline{C}'$ von M^n lässt sich immer eine gemeinsame Verfeinerung $\underline{C}''$ finden (d. h. $\underline{C}''$ soll Verfeinerung sowohl von $\underline{C}$ als auch von $\underline{C}'$ sein).
Hinweis: Das klingt vielleicht schwierig, ist aber leicht, wenn man den richtigen Satz aus der Vorlesung richtig anwendet.

(b) Lässt sich $\underline{C}''$ aus (a) konstruieren, indem man als Zellen alle nicht-leeren Schnitte $C_i \cap C'_j$ nimmt (wobei C_i eine Zelle von $\underline{C}$ und C_j eine Zelle von $\underline{C}'$ ist)?
Genauer: Beantworten Sie die obige Frage
(b1) im Fall $n = 1$
(b2) im Fall $n = 2$

(c) Sind $X_1, \ldots, X_m \subseteq M^n$ definierbare Mengen und $f_1, \ldots, f_k \colon M^n \to M$ definierbare Funktionen, so existiert eine Zellzerlegung von M^n derart, dass:
- Jede der Mengen X_i eine Vereinigung von Zellen ist; und
- Jede der Funktionen f_j stetig auf jeder Zelle ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte):

Eine Zelle $C \subseteq M^2$ muss keine Zelle bleiben, wenn man die beiden Koordinaten tauscht. Zeigen Sie, dass trotzdem folgendes wahr ist: Jede definierbare Teilmenge $X \subseteq M^2$ lässt sich als Vereinigung von endlich vielen Zellen C_i schreiben, wobei jede dieser Zellen beim Tauschen der Koordinaten eine Zelle bleibt.

Hinweis: Wenn eine Zelle unter Koordinatentausch keine Zelle bleibt, kann man sie unter Verwendung des Monotoniesatzes weiter zerstückeln.

Auf 1.a. Let $C = (C_1, \dots, C_n)$ and $C' = (C'_1, \dots, C'_{n'})$ be two decomposition of M^n then apply theorem 2.2.5 for definable sets $C_1, \dots, C_n, C'_1, \dots, C'_{n'}$.

Auf 1.b.

b1: Since the intersection of intervals or points and intervals are point or interval. so by using definition of o-minimality, the answer is positive.

b2:

$f : I \longrightarrow M$ Let $C = \Gamma_f$

$g : I' \longrightarrow M$ $C' = \Gamma_g$

$C'' = C \cap C' \neq \phi \Rightarrow \Gamma_f \cap \Gamma_g \neq \phi \longrightarrow \Gamma_f \cap \Gamma_g = \{$ can be finite set with more then one element. $\}$

$f : [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ $-2x^2+2$

$g : [0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ x^3-x

$x^3 - x + 2x^2 - 2 \Rightarrow (x-1)(x+1)(x+2) = 0 \Rightarrow \Gamma_f \cap \Gamma_g = \{\pm 1, 2\}$

that is not a cell.

Auf 1. c) $X_1, X_2, \dots, X_m \subseteq M^n$

$f_1, \dots, f_k : M^n \longrightarrow M$

By applying 2.2.5 for sets $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ we can find cell decomposition. $C = (C_1, \dots, C_n)$,

By applying 2.2.6 for function $f_i : M^n \longrightarrow M$ $1 \leq i \leq k$ we can find cell decomposition $D_i = (D_i^1, \dots, D_i^{n_i})$

then by applying part (a) to C and D_i $1 \leq i \leq k$ we can find a common refeinment of all of these. this decomposition has all properties.

Auf 2: For cells of type $C_{0,0}$ is clear.

$\sigma(C) := \{(y,x) \mid (x,y) \in C\}$

* Let C be of type $(1,0)$. $C = \Gamma_f$ for $f : I \longrightarrow M$

now, by applying monotonocity theorem, we can find $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ such that $f|_{(a_{i-1}, a_i)}$ is either constant or continuous and strictly monoton.

$\rightsquigarrow$ injective

Case 1: Let $f|_{(a_{i-1}, a_i)} = c$ is constant.

$\Rightarrow \Gamma_f|_{(a_{i-1}, a_i)} = (c_{i-1}, c_i) \times \{c\}$

$\Rightarrow \sigma(\Gamma_f|_{(a_{i-1}, a_i)}) = \{c\} \times (a_{i-1}, a_i)$ is a vertical interval which is $C_{(0,1)}$

Case 2: $f|_{(a_{i-1}, a_i)}$ is continuous, and strictly monoton

$\Rightarrow \sigma\left(\Gamma_f|_{(a_{i-1},a_i)}\right) = \{ (y, f^{-1}(y)) \mid \underbrace{f(c_{i-1}) < y < f(c_i)}_{\text{or limits of these Points.}} \}$

$\parallel$

$\{ (x, f(x)) \mid a_{i-1} < x < a_i \}$

W.l. assume f is strictly increasing

** Let C be a cell of the form $(1,1)$

$$C = (f,g)_I = \{ (x,y) \mid h_1 < x < h_2 \wedge f(x) < y < g(x) \}$$

apply monotancity theorem on $f, g : I \longrightarrow M$
and find Point $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ such that
$f|_{(a_i,a_{i+1})}$ is Constant or strictly monoton
$g|_{(a_i,a_{i+1})}$ ———— " ————

case 1) $f|_{(a_i,a_{i+1})} = d_1 \quad g|_{(a_i,a_{i+1})} = d_2$ (both are Constant).

$a_i < x < a_{i+1} \wedge d_1 < y < d_2 \quad \sigma(C|_{(c_i,c_{i+1})})$ is a $(1,1)$-cell.

Case 2: $f|_{(a_i,a_{i+1})} = d$ is Constant, $g|_{(a_i,a_{i+1})}$ is strictly monoton and continuous
injective ↘ w.l. assume

$a_i < x < a_{i+1} \wedge \quad d < y < g(x) \quad$ g is strictly increasing

$\downarrow$

$d < y < \underset{\sim\sim}{g(a_{i+1})} \quad \wedge \quad g^{-1}(y) < x < a_{i+1}$

or limit of g at a_{i+1}

$\Rightarrow \quad \sigma\left(C|_{(a_i,a_{i+1})}\right)$ is a cell of type $(1,1)$

Case 3, 4, f is strictly monoton, g is Constant.
both are strictly monoton.

Proof is similar.