Heinrich Heine Universität Düsseldorf

O-Minimalität – Blatt 7

Abgabe bis zum 2.6.2023, in der Vorlesung oder im Ilias

Prof. I. Halupczok
H. Khalilian

Wie üblich sind alle Antworten zu begründen/beweisen.

Bitte geben Sie an, welche Teilaufgaben Sie ganz gelöst / teilweise gelöst / gar nicht gelöst haben:

1 (a)	1 (b)	1 (c)	1 (d)	1 (e)

Aufgabe 1 (2+3+2+3+2 Punkte):

Im Folgenden sei $X \subseteq M^n$ eine definierbare Menge.

(a) Sei $a \in M^n$. Zeigen Sie, dass ein $d \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ existiert, so dass für alle hinreichend kleinen offenen Umgebungen $U \subseteq M^n$ von a gilt: $\dim(X \cap U) = d$.
Wir nennen dieses d die *lokale Dimension* von X bei a und schreiben $\dim_a X$ dafür.

(b) Wir nennen X *rein d-dimensional*, wenn für alle $a \in X$ gilt: $\dim_a X = d$. Zeigen Sie: d-dimensionale Zellen sind rein d-dimensional.

(c) Zeigen Sie: Ist X rein d-dimensional, so gilt sogar für alle $a \in X^{\mathrm{cl}}$: $\dim_a X = d$.

(d) Für $0 \leq d \leq n$ setzen wir $X_d := \{a \in X \mid \dim_a X = d\}$.
Zeigen Sie: X_d ist rein d-dimensional.

(e) Zeigen Sie: Ist $X_d \neq \emptyset$, so ist $\dim X_d = d$.

Achtung: Für (d) und (e) ist es zwar nützlich, eine Zellzerlegung von X zu betrachten; X_d ist dann aber nicht notwendigerweise eine Vereinigung von Zellen. (Warum?)

a) $i \in \{-\infty, 0, 1, \dots, \dim x\}$

Let $X_i = \{U \subseteq M^n \mid U \text{ is open box}, a \in U, \dim(U \cap a) = i\}$

$d :=$ minimum of i s.t $X_i \neq \emptyset$

Pay attention for any open box $U \subseteq M^n$, $a \in U$, $\dim(U \cap X) \leq \dim(X)$

$\Rightarrow$ It's not the case that all B_i is empty.

choose $U \in B_d$, V is any open subset of U. s.t $a \in V$.

$\dim(X \cap V) \leq \dim(A \cap U)$.

As d is minimum then $\dim(X \cap V) = \dim(X \cap U) = d$.

b) we proved for all $a \in cl(X)$, $\dim_a(X) = d$

$\dim(X) = d$

for any open box $U \subseteq M^n$, $a \in U \Rightarrow X \cap U \neq \emptyset$

$\pi : M^n \longrightarrow M^d$ (is projection on appropriate coordinate))

s.t $\pi(X) \cong X$ is a homeomorphism.

Since $X \cap U$ is an open set in X. (remember $\pi(X)$ is an open set in M^d)

$\Rightarrow$ $\pi(U \cap X)$ is an open set in M^d.

$\Rightarrow$ As $U \cap X \neq \emptyset$ then $\pi(U \cap X)$ contains an open box of M^d

$\Rightarrow$ $\dim(U \cap A) = \dim(\pi(U \cap A)) = d$.

c) X is pure d-dimensional $\rightarrow \forall x \in cl(X)$ $\dim_a(X) = d$

$a \in cl(X) \Rightarrow$

If $a \in X$ done!

If $a \notin X$ for any open set $a \in U$ $\quad U \cap X \neq \emptyset \Rightarrow \exists \underset{\neq a}{a'} \in U \cap X$

$a \in cl(X) \setminus X$

Let U be an any open box, $a \in U$, $\Rightarrow$ $U \cap X \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ $\exists a' \in U \cap X$, As $\dim_a(X) = d \Rightarrow \exists U'_{a'}$, $\dim(U'_{a'} \cap X) = d$

w.l. we can assume $U'_a \subseteq U$

$$\Rightarrow \quad \dim(U \cap X) \geq \dim(U'_{a'} \cap X) = d$$

X is pure d-dimension.

$$\Rightarrow \dim_a(X) = d$$

d, e)

$0 \leq d \leq n$, $\quad X_d := \{ a \in X \mid \dim_a X \overset{\geqslant}{=} d \}$

$\Rightarrow$ X_d is of pure dimension d.

Let $\mathcal{D}$ be a finite portition of X to cells.

$$B = \bigcup \{ C \in \mathcal{D} \mid \dim(C) = d \}$$

$$\{ a \in M^n \mid \dim_a(X) \geqslant d \} = cl(B)$$

$a \in cl(B) \Rightarrow a \in cl(C)$ for some $C \in \mathcal{D}$, with $\dim(C) = d$

For any open box $U \subseteq M^n$ $\quad a \in U \quad \dim(U \cap X) \geqslant \dim(U \cap C) = \dim(C) = d$

$\Rightarrow \dim(U \cap X) \geqslant d$

On the other hand, for all $a \in cl(X)$, if $a \notin cl(B)$, then there is open box $U \subseteq R^n$ such that $a \in U$ and $U \cap B \neq \emptyset$

$U \cap X \subseteq X / B$ and $X \setminus B$ is finite union of cells with dimension less dann d. $\Rightarrow$

$\dim(U \cap X) \leq \dim(X \setminus B) < d \Rightarrow \dim_a X < d$.

$$\Rightarrow \{ a \in cl(X) \mid \dim_a(X) < d \} = cl(X) \setminus \{ a \in R^m \mid \dim_a(X) \geqslant d \}$$

is definable.

$$\{ a \in cl(X) : \dim_a(X) < d \} = cl(A) \setminus cl(B) = \Big(\bigcup_{C \in \mathcal{D}} cl(C) \Big) \setminus \Big(\bigcup_{\substack{C \in \mathcal{D} \\ \dim(C) \geqslant d}} cl(C) \Big)$$

$$= \bigcup_{\substack{C \in \mathcal{D} \\ \dim(C) < d}} cl(C)$$

$$\Rightarrow \dim \{ a \in cl(A) : \dim_a(X) < d \} \leq \dim \Big(\bigcup_{C \in \mathcal{D},\ \dim(C) < d} cl(C) \Big)$$

$= \max \{ \dim(cl(C)) \mid C \in \mathcal{D}, \dim(C) < d \} = \max \{ \dim(C) : C \in \mathcal{D}, \dim(C) < d \}$

$< d$

By above. $x \in X_d = cl(B) \Rightarrow x \in cl(C)$ for some $\dim(C) \geq d$

$\Rightarrow \dim_a(cl(C)) = \dim_a(C) \geq d$

$\Rightarrow$ for some open set $x \in U$ $\dim(U \cap C) \geq d$

$\dim(X_d \cap U) \geq \dim(U \cap C) \geq d$

$\Rightarrow \dim_x (X_d) \geq d$

Hence

$\dim_a(X) \geq d \Rightarrow \dim_a(X_d) \geq d$