Kurzskript o-Minimalität

Immi Halupczok

6. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

O-Minimalität

1 Grundlagen

1.1 Die Intervalltopologie

Konvention 1.1.1 *In (fast?) der gesamten Vorlesung wird L eine Sprache sein, die $L_{\text{ord}} = \{<\}$ enthält. Außerdem werden wir nur solche L-Strukturen $\mathcal{M}$ betrachten, auf denen $<$ eine (totale) Ordnung ist. Wir verwenden übliche Notationen für Intervalle: Für $a_1, a_2 \in M_\infty := M \cup \{\pm\infty\}$ mit $a_1 < a_2$ setzen wir:*

(a) $[a_1, a_2] = \{x \in M \mid a_1 \leq x \leq a_2\}$
(b) $[a_1, a_2) = \{x \in M \mid a_1 \leq x < a_2\}$
(c) $(a_1, a_2] = \{x \in M \mid a_1 < x \leq a_2\}$
(d) $(a_1, a_2) = \{x \in M \mid a_1 < x < a_2\}$

(Mit ***Intervall*** *meinen wir eine Teilmenge von M, die eine dieser Formen hat. Mengen der Form (d) nennen wir auf* ***offene Intervalle****)*

Konvention 1.1.2 *Wir fassen $\mathcal{M}$ mit Hilfe der* ***Intervalltopologie*** *als topologischen Raum auf, d. h. eine Teilmenge $X \subseteq M$ ist offen, wenn zu jedem $a \in X$ Elemente $b_1 < a < b_2 \in M$ existieren mit $(b_1, b_2) \subseteq X$. Für $n \geq 2$ wird M^n mit der Produkttopologie als topologischer Raum aufgefasst.*

Lemma 1.1.3 *Sei $X \subseteq M^n$ definierbar, so ist auch der (topologische) Abschluss X^{cl} von X, das Innere X^{int} von X und der Rand ∂X von X definierbar. Dies gilt auch* ***uniform*** *in folgendem Sinn: Zu jeder L-Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ existiert eine L-Formel $\psi(\underline{x}, \underline{y})$, so dass für jedes $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^m$ gilt: $\psi(\mathcal{M}', \underline{b}) = \phi(\mathcal{M}', \underline{b})^{\text{cl}}$ (bzw. $= \phi(\mathcal{M}', \underline{b})^{\text{int}}$ bzw. $= \partial\phi(\mathcal{M}', \underline{b})$).*

Lemma 1.1.4 *Seien $X \subseteq Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen. Die Eigenschaften*

(a) *X ist abgeschlossen in Y*
(b) *X ist offen in Y*
(c) *X ist dicht in Y*

sind ***(uniform) definierbare Eigenschaften*** *im folgenden Sinn: Zu L-Formeln $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ und $\psi(\underline{x}, \underline{y})$ existiert eine L-Formel $\chi(\underline{x})$, so dass für jedes $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^m$ gilt: Ist $\phi(\mathcal{M}', \underline{b}) \subseteq \psi(\mathcal{M}', \underline{b})$, so gilt $\mathcal{M}' \models \chi(\underline{b})$ genau dann, wenn X abgeschlossen in Y ist (bzw. offen bzw. dicht).*

Definition 1.1.5 *Sei $X \subseteq M^n$ eine definierbare Menge.*

(a) *Man nennt X* ***definierbar zusammenhängend****, wenn sich X nicht als Vereinigung von zwei nicht-leeren disjunkten relativ abgeschlossenen definierbaren Teilmengen schreiben lässt.*
(b) *Eine maximale (bezüglich Inklusion) definierbar zusammenhängende Teilmenge von X nennt man* ***definierbare Zusammenhangskomponente*** *von X.*

Bemerkung 1.1.6 *Wie für normale Zusammenhangskomponenten beweist man:*

(a) *Die definierbaren Zusammenhangskomponenten einer definierbaren Menge X bilden eine Partition von X, und wenn es endlich viele sind, ist jede dieser definierbaren Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen in X.*
(b) *Das Bild einer definierbar zusammenhängenden Menge unter einer definierbaren stetigen Abbildung ist definierbar zusammenhängend.*
(c) *Eine lokal-konstante definierbare Funktion auf einer definierbar zusammenhängenden Menge ist bereits konstant.*

Bemerkung 1.1.7 *Ist $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ und ist $\phi(\underline{x})$ eine L-Formel, so ist $\phi(\mathcal{M})$ definierbar zusammenhängend genau dann, wenn $\phi(\mathcal{M}')$ definierbar zusammenhängend ist. (Dies gilt insbesondere, wenn $\phi(\mathcal{M}')$ zusammenhängend ist.)*

1.2 Definition und Beispiele

Definition 1.2.1 *Sei L eine Sprache, die $L_{\mathrm{ord}} = \{<\}$ enthält. Eine L-Struktur $\mathcal{M}$ heißt* ***o-minimal****, wenn sie als L_{ord}-Struktur ein Modell von* DLO *ist (also wenn „$<$“ eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte auf M definiert) und wenn jede (mit Parametern) definierbare Teilmenge von M eine endliche Vereinigung von Punkten und (offenen) Intervallen ist. Eine Theorie heißt* ***o-minimal****, wenn all ihre Modelle o-minimal sind.*

Bemerkung 1.2.2 *Dass eine Menge $X \subseteq M$ eine endliche Vereinigung von Punkten und Intervallen ist, ist äquivalent zur folgenden Bedingung: Es gibt endlich viele Elemente $-\infty = a_0 < a_1 < \cdots < a_{\ell-1} < a_\ell = +\infty$ in M_∞, so dass gilt: Jedes der Intervalle (a_i, a_{i+1}) ist entweder eine Teilmenge von X oder disjunkt von X.*

Bemerkung 1.2.3 *Definierbare Teilmengen $X \subseteq M$ von o-minimalen Strukturen haben also endlich viele Randpunkte. Außerdem: Ist X nicht-leer und nach oben beschränkt, so existiert $\sup X$. (Und analog für X nach unten beschränkt und $\inf X$.)*

Beispiel 1.2.4 *Die Theorie* DLO *der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist o-minimal.*

Lemma 1.2.5 *Sind $X_1, \ldots, X_\ell \subseteq M$ endliche Vereinigungen von Punkten und Intervallen, so ist auch jede boolsche Kombination der Mengen X_i eine Vereinigung von Punkten und Intervallen. Insbesondere gilt: Hat $\mathcal{M}$ Quantoren-Elimination und definiert jede atomare Formel eine endliche Vereinigungen von Punkten und Intervallen, so ist $\mathcal{M}$ o-minimal.*

Erinnerung: In einer **angeordneten (abelschen) Gruppe** fordern wir, dass für alle a, b, c gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. In einem **angeordneten Ring** fordern wir außerdem $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

Bemerkung 1.2.6 *In diesen Strukturen sind Addition und ggf. Multiplikation stetig bezüglich der Intervalltopologie.*

Beispiel 1.2.7 *Die Theorie* DOAG *der nicht-trivialen divisiblen angeordneten abelschen Gruppen ist o-minimal.*

Satz 1.2.8 *Die Theorie* RCF *der reell abgeschlossenen Körper ist o-minimal.*

Lemma 1.2.9 *Ist K ein reell abgeschlossener Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom, so gilt für f der Zwischenwertsatz, d. h. sind $a, b \in K$ so, dass $a < b$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.*

Definition 1.2.10 *Sei K ein angeordneter Körper. Ein angeordneter K-Vektorraum ist eine Struktur $\mathcal{M}$ in der Sprache $L := L_{K\text{-VR}} \cup \{<\}$, die ein K-Vektorraum ist, die als additive Gruppe eine angeordnete Gruppe ist, und so dass für $v \in M$ und $r \in K$ gilt: Wenn $v > 0$ und $r > 0$ ist, dann ist $rv > 0$.*

Satz 1.2.11 *Sei K ein angeordneter Körper. Die Theorie der nicht-trivialen angeordneten K-Vektorräume hat Quantoren-Elimination.*

Korollar 1.2.12 *Nicht-triviale angeordnete Vektorräume (über angeordneten Körpern) sind o-minimal.*

1.3 Erste Folgerungen

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{M}$ immer eine o-minimale Struktur in einer Sprache L.

Lemma 1.3.1 *Die definierbar zusammenhängenden Teilmengen von M sind genau die leere Menge, die ein-Punkt-Mengen und die Intervalle.*

Lemma 1.3.2 *In $\mathcal{M}$ gilt der Zwischenwertsatz für definierbare stetige Funktionen: Ist $f\colon [a, b] \to M$ definierbar und stetig mit $f(a) < f(b)$, so existiert für jedes $d \in (f(a), f(b))$ ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.*

Satz 1.3.3 *Ist $L \supseteq L_{\text{oag}} := \{<, 0, +, -\}$, und ist $\mathcal{M}$ als L_{oag}-Struktur eine angeordnete abelsche Gruppe, so gilt:*

(a) *$\mathcal{M}$ ist (als Gruppe) divisibel (also als L_{oag}-Struktur ein Modell von* DOAG*).*
(b) *Die einzigen definierbaren Untergruppen von M sind $\{0\}$ und M selbst.*

Satz 1.3.4 *Jeder o-minimale angeordnete Ring ist ein reell abgeschlossener Körper (also ein Modell von* RCF*).*

2 Geometrie in o-minimalen Strukturen

Im gesamten Kapitel sei $\mathcal{M}$ eine o-minimale Struktur in einer Sprache L.

2.1 Der Monotonie-Satz

Satz 2.1.1 (Monotonie-Satz) *Ist $f\colon M \to M$ definierbar, so existieren $a_0 = -\infty < a_1 < \cdots < a_{n-1} < a_n = +\infty$, so dass f auf jedem der offenen Intervalle (a_{i-1}, a_i) $(1 \leq i \leq n)$ entweder konstant ist oder stetig und streng monoton (steigend oder fallend).*

Korollar 2.1.2 *Existenz vom Limes: Sei $f\colon (a,b) \to M$ definierbar, für $a, b \in M_\infty$. Dann existieren $\lim_{x\to a+} f(x)$ und $\lim_{x \to b-} f(x)$ in M_∞.*

Korollar 2.1.3 *Ist $f\colon [a,b] \to M$ stetig und definierbar (für $a, b \in M$), so nimmt f ein Maximum und ein Minimum an.*

2.2 Zell-Zerlegung: die Sätze

Definition 2.2.1 *Sei $X \subseteq M^n$ eine definierbare Menge. Wir schreiben $C(X)$ für die Menge der stetigen definierbaren Funktionen auf X und setzen $C_\infty(X) := C(X) \cup \{\pm\infty\}$, wobei $\pm\infty$ als Funktionen auf X angesehen werden, die überall den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ annehmen.*

Konvention 2.2.2 *Sei $X \subset M^n$ eine definierbare Menge und seien $f, g \in C_\infty(X)$.*

(a) *Mit $f < g$ meinen wir: $\forall x \in X\colon f(x) < g(X)$.*
(b) *Ist $f < g$, so bezeichnet (f,g) das „Intervall zwischen f und g“: $(f,g) = \{(x,y) \in X \times M \mid f(x) < y < g(x)\}$.*

Definition 2.2.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n-Tupel $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0,1\}^n$ defineren wir, welche Teilmengen von M^n wir $(i_1, \ldots, i_n)$-Zellen nennen.*

(a) *Fall $n = 0$: Die Menge M^0 ist eine $()$-Zelle.*
(b) *Fall $n = 0$, $i_n = 0$: Eine $(i_1, \ldots, i_{n-1}, 0)$-Zelle ist ein Graph einer Funktion $f \in C(B)$, wobei B eine $(i_1, \ldots, i_{n-1})$-Zelle ist:*

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}.$$

(c) *Fall $n = 0$, $i_n = 1$: Eine $(i_1, \ldots, i_{n-1}, 1)$-Zelle ist ein Intervall zwischen zwei Funktionen $f, g \in C_\infty(B)$ (mit $f < g$), wobei B eine $(i_1, \ldots, i_{n-1})$-Zelle ist:*

$$(f,g) = \{(x,y) \in B \times M \mid f(x) < y < g(x)\}.$$

Definition 2.2.4 *Eine **Zellzerlegung** von M^n ist eine Partition von M^n in endlich viele Zellen der folgenden Form:*

(a) *Fall $n = 0$: Die einzige Zellzerlegung von M^0 besteht nur aus M^0 selbst.*
(b) *Fall $n \geq 1$: Eine Zellzerlegung von M^n erhält man wie folgt:*
   - *Man wähle eine Zellzerlegung $B_1, \ldots, B_k$ von M^{n-1}*
   - *Für jede dieser Zellen B_i wähle man Funktionen $f_{i,1}, \ldots, f_{i,\ell_i} \in C_\infty(B_i)$ mit $f_{i,1} < \cdots < f_{i,\ell_i}$.*
   - *Daraus erhält man eine Zellzerlegung, die aus den folgenden Mengen besteht: für jedes i die Mengen $(-\infty, f_{i,1})$, $\mathrm{gr}(f_{i,1})$, $(f_{i,1}, f_{i,2})$, $\mathrm{gr}(f_{i,2})$, $\ldots$, $\mathrm{gr}(f_{i,\ell_i-1})$, $(f_{i,\ell_i-1}, f_{i,\ell_i})$,$\mathrm{gr}(f_{i,\ell_i})$, $(f_{i,\ell_i}, +\infty)$.*

Satz 2.2.5 (Zellzerlegung für definierbare Mengen) *Sind* $X_1, \dots, X_\ell \subseteq M^n$ *definierbare Mengen, so existiert eine Zellzerlegung von* M^n*, die mit jeder dieser Mengen* X_i ***kompatibel*** *ist, d. h.* X_i *ist eine Vereinigung von Zellen.*

Satz 2.2.6 (Zellzerlegung für eine definierbare Funktion) *Ist* $f\colon M^n \to M$ *eine definierbare Funktion, so existiert eine Zellzerlegung von* M^n*, so dass die Einschränkung von* f *auf jede Zelle stetig ist.*

Bemerkung 2.2.7 $(1, \dots, 1)$*-Zellen sind offen; alle anderen Zellen haben leeres Inneres.*

Korollar 2.2.8 *Sind* $X, Y \subseteq M^n$ *definierbare Mengen mit* $X \cup Y = M^n$*, so hat mindestens eine der beiden Mengen nicht-leeres Inneres.*

Korollar 2.2.9 *Ist* $f\colon M^n \to M$ *definierbar, so ist* f *fast überall stetig, im Sinne von: Die Menge der Unstetigkeitsstellen von* f *leeres Inneres.*

Korollar 2.2.10 („Endlichkeitslemma") *Ist* $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ *eine Formel, so dass* $\phi(\underline{a}, \mathcal{M})$ *endlich ist für alle* $\underline{a} \in M^m$*, so existiert eine uniforme Schranke an die Kardinalitäten dieser Menge, d. h. es existiert ein* $N \in \mathbb{N}$*, so dass für alle* $\underline{a} \in M^m$ *gilt:* $\#\phi(\underline{a}, \mathcal{M}) \leq N$*.*

Korollar 2.2.11 *Ist eine Struktur* $\mathcal{M}$ *o-minimal, so ist sogar* $\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ *o-minimal (d. h. alle* $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ *sind auch o-minimal).*

Lemma 2.2.12 *Sei* Z *eine* $(i_1, \dots, i_n)$*-Zelle, und sei* $\pi\colon M^n \to M^m$ *die Projektion auf diejenigen Koordinaten, für die* $i_k = 1$ *ist. Dann induziert* π *einen Homöomorphismus von* Z *nach* $\pi(Z)$*, und* $\pi(Z)$ *ist eine offene Zelle.*

Lemma 2.2.13 *Jede Zelle ist definierbar zusammenhängend.*

2.3 Zell-Zerlegung: die Beweise

Lemma 2.3.1 *Sei* $f\colon M^m \times M \to M$ *so, dass für alle* $(\underline{a}, b) \in M^m \times M$ *gilt:*

- $f(\cdot, b)\colon M^m \to M$ *ist stetig.*
- $f(\underline{a}, \cdot)\colon M \to M$ *ist stetig und monoton.*

Dann ist f *stetig.*

2.4 Dimension

Notation 2.4.1 *Ist* $X \subseteq M^{m+n}$ *und* $\underline{a} \in M^m$*, so setze* $X_{\underline{a}} := \{\underline{b} \in M^n \mid (\underline{a}, \underline{b}) \in X\}$*.*

Definition 2.4.2 *Die Dimension* $\dim X$ *einer definierbaren Menge* $X \subseteq M^n$ *ist definiert als die größte Zahl d, so dass eine definierbare Abbildung* $f\colon X \to M^d$ *existiert, bei der* $f(X)$ *nicht-leeres Inneres hat. Außerdem setzen wir* $\dim \emptyset := -\infty$*.*

Lemma 2.4.3 *Seien $X, Y \subseteq M^n$ definierbar und sei $f\colon X \to Y$ eine definierbare Bijektion. Dann gilt: X hat nicht-leeres Inneres genau dann, wenn Y nicht-leeres Inneres hat.*

Satz 2.4.4 *Seien X und Y definierbare Mengen. Die Dimension hat folgende Eigenschaften:*

(a) $\dim M^n = n$
(b) *X ist endlich genau dann, wenn $\dim X \leq 0$ ist.*
(c) *Ist $f\colon X \to Y$ eine definierbare Bijektion, so ist $\dim X = \dim Y$.*
(d) *Ist $X \subseteq Y$, so gilt $\dim X \leq \dim Y$.*
(e) $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}$.
(f) $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.
(g) *Ist $f\colon X \to Y$ definierbar und gilt $\dim f^{-1}(b) = d$ für alle $b \in Y$, so ist $\dim X = d + \dim Y$.*

Lemma 2.4.5 *Die Dimension einer $(i_1, \ldots, i_n)$-Zelle ist $i_1 + \cdots + i_n$. Die Dimension einer beliebigen definiarbaren Menge $X \subseteq M^n$ lässt sich an einer dazupassenden Zellzerlegung $(Z_j)_j$ ablesen:*

$$\dim X = \max\{\dim Z_j \mid Z_j \subseteq X\}.$$

Satz 2.4.6 *Dimension ist uniform definierbar: Ist $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine Formel, so existiert für jedes $d \in \mathbb{N}$ eine Formel $\psi_d(\underline{y})$, so dass für alle Modelle $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und alle $\underline{b} \in (\mathcal{M}')^m$ gilt: $\dim \phi(\mathcal{M}', \underline{b}) = d$ genau dann, wenn $\mathcal{M}' \models \psi_d(\underline{b})$.*

Lemma 2.4.7 *Für $X \subseteq M^n$ definierbar gilt: $\dim X \geq d$ genau dann, wenn eine Projektion $\pi\colon M^n \to M^d$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert, so dass $\pi(X)$ nicht-leeres Inneres hat.*

Satz 2.4.8 *Sei $X \subseteq M^n$ definierbar. Dann ist $\dim(X^{\mathrm{cl}} \setminus X) < \dim X$.*

Lemma 2.4.9 *Sei $X \subseteq M \times M^{n-1}$ definierbar. Dann gilt für fast alle $a \in M$: $(X^{\mathrm{cl}} \setminus X)_a = X_a^{\mathrm{cl}} \setminus X_a$.*

2.5 Mehr definierbare Topologie

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass $\mathcal{M}$ eine angeordnete abelsche Gruppe ist und insbesondere $L \supseteq L_{\mathrm{oag}}$.

Lemma 2.5.1 *Ist $X \subseteq M^{m+n}$ definierbar und $\pi\colon M^{m+n} \to M^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten, so existiert eine definierbare Funktion $f\colon \pi(X) \to M^n$ mit $\operatorname{gr} f \subseteq X$. (Eine solche Funktion f heißt **definierbare Auswahlfunktion** oder auch **definierbare Skolemfunktion**.)*

Satz 2.5.2 (Kurvenauswahl) *Sei $X \subseteq M^n$ definierbar und $\underline{a} \in X^{\mathrm{cl}}$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine stetige definierbare Funktion $\gamma\colon (0, \epsilon) \to X$ so, dass $\lim_{t \to 0} \gamma(t) = \underline{a}$ ist.*

Definition 2.5.3 *Für $\underline{a} \in M^n$ setze $\|\underline{a}\| := \max_i |a_i|$.*

Definition 2.5.4 *Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ heißt beschränkt, wenn ein $R \in M$ existiert, so dass $\|\underline{a}\| < R$ ist für alle $\underline{a} \in X$.*

Satz 2.5.5 *Ist $f\colon X \to M^n$ eine stetige definierbare Funktion auf einer definierbaren beschränkten und abgeschlossen Menge $X \subseteq M^m$, so ist auch $f(X)$ beschränkt und abgeschlossen.*

Korollar 2.5.6 *Eine stetige definierbare Funktion $f\colon X \to M$ auf einer definierbaren beschränkten und abgeschlossen Menge $X \subseteq M^m$ nimmt ein Minimum und ein Maximum an.*

Lemma 2.5.7 *Ist $X \subseteq M^n$ definierbar, beschränkt und abgeschlossen und ist $\pi\colon M^n \to M^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten (für ein $m \leq n$), so ist auch $\pi(X)$ abgeschlossen.*

2.6 Triangulierungen

Definition 2.6.1 *Wir sagen, dass zwei definierbare Mengen $X \subseteq M^n, X' \subseteq M^{n'}$ den selben **definierbaren Homöomorphietyp** haben, wenn ein definierbarer Homöomorphismus von X nach X' existiert.*

Satz 2.6.2 *Sei $X \subseteq M^{m+n}$ definierbar. Dann haben die Mengen $X_{\underline{a}} \subseteq M^n$ für $\underline{a} \in M^m$ (siehe Notation 2.4.1) nur endlich viele verschiedene definierbare Homöomorphietypen.*

Definition 2.6.3 (a) *Zu jeder nicht-leeren Teilmenge $I \subseteq \{1, \ldots, N\}$ definieren wir einen zugehörigen (offenen) **Standard-Simplex** in M^N wie folgt:*

$$\Delta_I := \{\underline{a} \in M^N \mid \sum_{i=1}^{N} a_i = 1 \quad \wedge \quad a_i > 0 \text{ für } i \in I \quad \wedge \quad a_i = 0 \text{ für } i \notin I.\}$$

(b) *Eine **(definierbare) Triangulierung** einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ ist ein definierbarer Homöomoprhismus $\tau\colon X \to \tau(X) \subseteq M^N$ (für ein geeignetes N), so dass $\tau(X)$ eine Vereinigung von Standard-Simplizes ist. Ein Simplex der Triangulierung ist das Urbild $\tau^{-1}(\Delta_I)$ eines Standard-Simplexes Δ_I.*

Satz 2.6.4 *Sind $X_1, \ldots, X_\ell \subseteq M^n$ definierbar, so existiert eine Triangulierung von M^n, so dass jedes X_i eine Vereinigung von Simplizes ist.*

Korollar 2.6.5 *Unter allen definierbaren Mengen existieren nur abzählbar viele verschiedene definierbare Homöomorphietypen.*

3 $\mathbb{R}_{\exp}$ ist o-minimal

3.1 Ziel

In diesem Abschnitt sei $L = L_{\text{ring}} \cup \{\exp\}$. Wenn wir $\mathbb{R}$ als L-Struktur auffassen, nennen wir es $\mathbb{R}_{\exp}$. Wir setzen $T_{\exp} := \mathrm{Th}(\mathbb{R}_{\exp})$.

Satz 3.1.1 *$T_{\exp}$ ist o-minimal.*

Korollar 3.1.2 *Seien $N, n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Mengen der Form $X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$, wobei f ein beliebiges Polymon über $\mathbb{R}$ mit maximal N Monomen ist. Die so erhaltenen Mengen V haben nur endlich viele verschiedene Homöomorphietypen (bei festen N und n).*

Allgemeiner gilt eine entsprechende Aussagen auch für Mengen X, die durch boolsche Kombintationen von beschränkt vielen polynomialen Gleichungen und Ungleichungen gegeben sind.

3.2 $T_{\exp}$ ist modellvollständig

Definition 3.2.1 *Eine Theorie T heißt **modellvollständig**, wenn gilt: Ist M ein Modell, und ist $M_0 \subseteq M$ eine Unterstruktur, die auch ein Modell ist, so ist M_0 bereits eine elementare Unterstruktur.*

Satz 3.2.2 *Für eine Theorie T sind äquivalent:*

(a) *T ist modellvollständig.*
(b) *Jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ ist, modulo T, zu einer **existentiellen Formel** äquivalent, d. h. zu einer Formel der Form $\exists \underline{y} \psi(\underline{x}, \underline{y})$, für ψ quantorenfrei.*
(c) *Jede L-Formel $\phi(\underline{x})$ ist, modulo T, zu einer **universellen Formel** äquivalent, d. h. zu einer Formel der Form $\forall \underline{y} \psi(\underline{x}, \underline{y})$, für ψ quantorenfrei.*
(d) *Sind $M_0 \subseteq M$ Modelle von T, so gilt für existentielle $L(M_0)$-Aussagen ϕ: $M \models \phi \Rightarrow M_0 \models \phi$.*

Satz 3.2.3 *$T_{\exp}$ ist modellvollständig.*

Satz 3.2.4 *$\mathbb{R}_{\text{an}}$ ist o-minimal.*

Definition 3.2.5 *Sei $M_0 \models T_{\exp}$. Ein **Quasi-Polynom** in $x_1, \ldots, x_n$ über M_0 ist ein Polynom in $M_0[x_1, \ldots, x_n, e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}] =: M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$.*

Lemma 3.2.6 *Jede existentielle Formel $\phi(\underline{x})$ ist äquivalent zu einer Formel der Form $\exists \underline{y}\colon q(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, für ein Quasipolynom q.*

Korollar 3.2.7 *Satz 3.2.3 folgt aus der folgenden Aussage:*

Sind $M_0 \subseteq M$ Modelle von $T_{\exp}$, so hat jedes Quasi-Polynom $q \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ mit Nullstellen in M^n bereits eine Nullstelle in M_0^n.

Definition 3.2.8 *Sind $q_1, \ldots, q_m \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$, so fassen wir $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_m)$ als Abbildung $M^n \to M^m$ auf und setzen:*

(a) $V(\underline{q}) := \{\underline{a} \in M^n \mid \underline{q}(\underline{a}) = 0\}$
(b) $V^{\text{reg}}(\underline{q}) = \{\underline{a} \in V(\underline{q}) \mid \operatorname{rk}((D\underline{q})(\underline{a})) = m\}$, *wobei* $(D\underline{q})(\underline{a}) \in M^{m \times n}$ *die totale Ableitung von* $\underline{q}$ *am Punkt* $\underline{a}$ *ist.*

Lemma 3.2.9 *Für* $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ *gilt:* $V^{\text{reg}}(\underline{q}) \subset M_0^n$.

Lemma 3.2.10 *Ist* $q \in M_0[x_1, \dots, x_n, e^{\cdots}]$ *so, dass* $V(q) \neq \emptyset$ *ist, so existiert ein* m *und* $q_1, \dots, q_{n+m} \in M_0[x_1, \dots, x_{n+m}, e^{\cdots}]$, *so dass* $\pi(V^{\text{reg}}(q_1, \dots, q_{n+m})) \cap V(q) \neq \emptyset$ *ist, wobei* $\pi \colon M^{n+m} \to M^n$ *die Projektion auf die ersten* n *Koordinaten ist.*

Definition 3.2.11 *Sei* M_0^{conv} *die konvexe Hülle von* M_0 *in* M, *also* $M_0^{\text{conv}} = \bigcup_{a \in (M_0)_{>0}} [-a, a]$.

Lemma 3.2.12 *Für* $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ *gilt* $V^{\text{reg}}(\underline{q}) \subset (M_0^{\text{conv}})^n$.

Lemma 3.2.13 *Für* $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ *gilt: Ist* $\underline{a} \in V^{\text{reg}}(\underline{q}) \cap (M_0^{\text{conv}})^n$, *so ist bereits* $\underline{a} \in M_0^n$.

3.3 O-Minimalität

Satz 3.3.1 $T_{\exp}$ *ist o-minimal.*

Lemma 3.3.2 *Wir fassen* $\mathbb{R}$ *auf als* L'*-Struktur in einer beliebigen Sprache* $L' \supset L_{\text{ring}} \cup \{\exp\}$, *und wir nehmen an, dass* $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ *Modelle von* $\operatorname{Th}_{L'}(\mathbb{R})$ *sind.*

Sei $q \in M_0[x_1, \dots, x_n, e^{\cdots}]$, *und sei* $Y \subseteq V(q)$ *eine nicht-leere* $L'(M)$*-definierbare Teilmenge, die offen und abgeschlossen in* $V(q)$ *ist. Dann existiert ein* m *und* $q_1, \dots, q_{n+m} \in M_0[x_1, \dots, x_{n+m}, e^{\cdots}]$, *so dass* $\pi(V^{\text{reg}}(q_1, \dots, q_{n+m})) \cap Y \neq \emptyset$ *ist, wobei* $\pi \colon M^{n+m} \to M^n$ *die Projektion auf die ersten* n *Koordinaten ist.*

Lemma 3.3.3 *Ist* $q \in \mathbb{R}[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$, *so hat* $V(q)$ *nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.*

Index