

Kurzskript o-Minimalität

Immi Halupczok

6. Juli 2023

Inhaltsverzeichnis

O-Minimalität	2
1 Grundlagen	2
1.1 Die Intervalltopologie	2
1.2 Definition und Beispiele	3
1.3 Erste Folgerungen	4
2 Geometrie in o-minimalen Strukturen	5
2.1 Der Monotonie-Satz	5
2.2 Zell-Zerlegung: die Sätze	5
2.3 Zell-Zerlegung: die Beweise	7
2.4 Dimension	7
2.5 Mehr definierbare Topologie	8
2.6 Triangulierungen	9
3 \mathbb{R}_{exp} ist o-minimal	9
3.1 Ziel	9
3.2 T_{exp} ist modellvollständig	10
3.3 O-Minimalität	11

O-Minimalität

1 Grundlagen

1.1 Die Intervalltopologie

Konvention 1.1.1 In (fast?) der gesamten Vorlesung wird L eine Sprache sein, die $L_{\text{ord}} = \{<\}$ enthält. Außerdem werden wir nur solche L -Strukturen \mathcal{M} betrachten, auf denen $<$ eine (totale) Ordnung ist. Wir verwenden übliche Notationen für Intervalle: Für $a_1, a_2 \in M_\infty := M \cup \{\pm\infty\}$ mit $a_1 < a_2$ setzen wir:

- (a) $[a_1, a_2] = \{x \in M \mid a_1 \leq x \leq a_2\}$
- (b) $[a_1, a_2) = \{x \in M \mid a_1 \leq x < a_2\}$
- (c) $(a_1, a_2] = \{x \in M \mid a_1 < x \leq a_2\}$
- (d) $(a_1, a_2) = \{x \in M \mid a_1 < x < a_2\}$

(Mit **Intervall** meinen wir eine Teilmenge von M , die eine dieser Formen hat. Mengen der Form (d) nennen wir auf **offene Intervalle**)

Konvention 1.1.2 Wir fassen \mathcal{M} mit Hilfe der **Intervalltopologie** als topologischen Raum auf, d. h. eine Teilmenge $X \subseteq M$ ist offen, wenn zu jedem $a \in X$ Elemente $b_1 < a < b_2 \in M$ existieren mit $(b_1, b_2) \subseteq X$. Für $n \geq 2$ wird M^n mit der Produkttopologie als topologischer Raum aufgefasst.

Lemma 1.1.3 Sei $X \subseteq M^n$ definierbar, so ist auch der (topologische) Abschluss X^{cl} von X , das Innere X^{int} von X und der Rand ∂X von X definierbar. Dies gilt auch **uniform** in folgendem Sinn: Zu jeder L -Formel $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ existiert eine L -Formel $\psi(\underline{x}, \underline{y})$, so dass für jedes $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^m$ gilt: $\psi(\mathcal{M}', \underline{b}) = \phi(\mathcal{M}', \underline{b})^{\text{cl}}$ (bzw. $= \phi(\mathcal{M}', \underline{b})^{\text{int}}$ bzw. $= \partial\phi(\mathcal{M}', \underline{b})$).

Lemma 1.1.4 Seien $X \subseteq Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen. Die Eigenschaften

- (a) X ist abgeschlossen in Y
- (b) X ist offen in Y
- (c) X ist dicht in Y

sind (**uniform**) **definierbare Eigenschaften** im folgenden Sinn: Zu L -Formeln $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ und $\psi(\underline{x}, \underline{y})$ existiert eine L -Formel $\chi(\underline{x})$, so dass für jedes $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und jedes $\underline{b} \in (M')^m$ gilt: Ist $\phi(\mathcal{M}', \underline{b}) \subseteq \psi(\mathcal{M}', \underline{b})$, so gilt $\mathcal{M}' \models \chi(\underline{b})$ genau dann, wenn X abgeschlossen in Y ist (bzw. offen bzw. dicht).

Definition 1.1.5 Sei $X \subseteq M^n$ eine definierbare Menge.

- (a) Man nennt X **definierbar zusammenhängend**, wenn sich X nicht als Vereinigung von zwei nicht-leeren disjunkten relativ abgeschlossenen definierbaren Teilmengen schreiben lässt.

- (b) Eine maximale (bezüglich Inklusion) definierbar zusammenhängende Teilmenge von X nennt man **definierbare Zusammenhangskomponente** von X .

Bemerkung 1.1.6 Wie für normale Zusammenhangskomponenten beweist man:

- (a) Die definierbaren Zusammenhangskomponenten einer definierbaren Menge X bilden eine Partition von X , und wenn es endlich viele sind, ist jede dieser definierbaren Zusammenhangskomponenten offen und abgeschlossen in X .
- (b) Das Bild einer definierbar zusammenhängenden Menge unter einer definierbaren stetigen Abbildung ist definierbar zusammenhängend.
- (c) Eine lokal-konstante definierbare Funktion auf einer definierbar zusammenhängenden Menge ist bereits konstant.

Bemerkung 1.1.7 Ist $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}'$ und ist $\phi(\underline{x})$ eine L -Formel, so ist $\phi(\mathcal{M})$ definierbar zusammenhängend genau dann, wenn $\phi(\mathcal{M}')$ definierbar zusammenhängend ist. (Dies gilt insbesondere, wenn $\phi(\mathcal{M}')$ zusammenhängend ist.)

1.2 Definition und Beispiele

Definition 1.2.1 Sei L eine Sprache, die $L_{\text{ord}} = \{<\}$ enthält. Eine L -Struktur \mathcal{M} heißt **o -minimal**, wenn sie als L_{ord} -Struktur ein Modell von DLO ist (also wenn „ $<$ “ eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte auf M definiert) und wenn jede (mit Parametern) definierbare Teilmenge von M eine endliche Vereinigung von Punkten und (offenen) Intervallen ist. Eine Theorie heißt **o -minimal**, wenn all ihre Modelle o -minimal sind.

Bemerkung 1.2.2 Dass eine Menge $X \subseteq M$ eine endliche Vereinigung von Punkten und Intervallen ist, ist äquivalent zur folgenden Bedingung: Es gibt endlich viele Elemente $-\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_{\ell-1} < a_\ell = +\infty$ in M_∞ , so dass gilt: Jedes der Intervalle (a_i, a_{i+1}) ist entweder eine Teilmenge von X oder disjunkt von X .

Bemerkung 1.2.3 Definierbare Teilmengen $X \subseteq M$ von o -minimalen Strukturen haben also endlich viele Randpunkte. Außerdem: Ist X nicht-leer und nach oben beschränkt, so existiert $\sup X$. (Und analog für X nach unten beschränkt und $\inf X$.)

Beispiel 1.2.4 Die Theorie DLO der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte ist o -minimal.

Lemma 1.2.5 Sind $X_1, \dots, X_\ell \subseteq M$ endliche Vereinigungen von Punkten und Intervallen, so ist auch jede boolesche Kombination der Mengen X_i eine Vereinigung von Punkten und Intervallen. Insbesondere gilt: Hat \mathcal{M} Quantoren-Elimination und definiert jede atomare Formel eine endliche Vereinigung von Punkten und Intervallen, so ist \mathcal{M} o -minimal.

Erinnerung: In einer **angeordneten (abelschen) Gruppe** fordern wir, dass für alle a, b, c gilt: $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. In einem **angeordneten Ring** fordern wir außerdem $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$.

Bemerkung 1.2.6 *In diesen Strukturen sind Addition und ggf. Multiplikation stetig bezüglich der Intervalltopologie.*

Beispiel 1.2.7 *Die Theorie DOAG der nicht-trivialen divisiblen angeordneten abelschen Gruppen ist o-minimal.*

Satz 1.2.8 *Die Theorie RCF der reell abgeschlossenen Körper ist o-minimal.*

Lemma 1.2.9 *Ist K ein reell abgeschlossener Körper und $f \in K[x]$ ein Polynom, so gilt für f der Zwischenwertsatz, d. h. sind $a, b \in K$ so, dass $a < b$ und $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = 0$.*

Definition 1.2.10 *Sei K ein angeordneter Körper. Ein angeordneter K -Vektorraum ist eine Struktur \mathcal{M} in der Sprache $L := L_{K\text{-VR}} \cup \{<\}$, die ein K -Vektorraum ist, die als additive Gruppe eine angeordnete Gruppe ist, und so dass für $v \in M$ und $r \in K$ gilt: Wenn $v > 0$ und $r > 0$ ist, dann ist $rv > 0$.*

Satz 1.2.11 *Sei K ein angeordneter Körper. Die Theorie der nicht-trivialen angeordneten K -Vektorräume hat Quantoren-Elimination.*

Korollar 1.2.12 *Nicht-triviale angeordnete Vektorräume (über angeordneten Körpern) sind o-minimal.*

1.3 Erste Folgerungen

In diesem Abschnitt sei \mathcal{M} immer eine o-minimale Struktur in einer Sprache L .

Lemma 1.3.1 *Die definierbar zusammenhängenden Teilmengen von M sind genau die leere Menge, die ein-Punkt-Mengen und die Intervalle.*

Lemma 1.3.2 *In \mathcal{M} gilt der Zwischenwertsatz für definierbare stetige Funktionen: Ist $f: [a, b] \rightarrow M$ definierbar und stetig mit $f(a) < f(b)$, so existiert für jedes $d \in (f(a), f(b))$ ein $c \in (a, b)$ mit $f(c) = d$.*

Satz 1.3.3 *Ist $L \supseteq L_{\text{oag}} := \{<, 0, +, -\}$, und ist \mathcal{M} als L_{oag} -Struktur eine angeordnete abelsche Gruppe, so gilt:*

- (a) \mathcal{M} ist (als Gruppe) divisibel (also als L_{oag} -Struktur ein Modell von DOAG).
- (b) Die einzigen definierbaren Untergruppen von M sind $\{0\}$ und M selbst.

Satz 1.3.4 *Jeder o-minimale angeordnete Ring ist ein reell abgeschlossener Körper (also ein Modell von RCF).*

2 Geometrie in o-minimalen Strukturen

Im gesamten Kapitel sei \mathcal{M} eine o-minimale Struktur in einer Sprache L .

2.1 Der Monotonie-Satz

Satz 2.1.1 (Monotonie-Satz) *Ist $f: M \rightarrow M$ definierbar, so existieren $a_0 = -\infty < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = +\infty$, so dass f auf jedem der offenen Intervalle (a_{i-1}, a_i) ($1 \leq i \leq n$) entweder konstant ist oder stetig und streng monoton (steigend oder fallend).*

Korollar 2.1.2 Existenz vom Limes: *Sei $f: (a, b) \rightarrow M$ definierbar, für $a, b \in M_\infty$. Dann existieren $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ in M_∞ .*

Korollar 2.1.3 *Ist $f: [a, b] \rightarrow M$ stetig und definierbar (für $a, b \in M$), so nimmt f ein Maximum und ein Minimum an.*

2.2 Zell-Zerlegung: die Sätze

Definition 2.2.1 *Sei $X \subseteq M^n$ eine definierbare Menge. Wir schreiben $C(X)$ für die Menge der stetigen definierbaren Funktionen auf X und setzen $C_\infty(X) := C(X) \cup \{\pm\infty\}$, wobei $\pm\infty$ als Funktionen auf X angesehen werden, die überall den Wert $+\infty$ bzw. $-\infty$ annehmen.*

Konvention 2.2.2 *Sei $X \subset M^n$ eine definierbare Menge und seien $f, g \in C_\infty(X)$.*

- (a) *Mit $f < g$ meinen wir: $\forall x \in X: f(x) < g(x)$.*
- (b) *Ist $f < g$, so bezeichnet (f, g) das „Intervall zwischen f und g “: $(f, g) = \{(x, y) \in X \times M \mid f(x) < y < g(x)\}$.*

Definition 2.2.3 *Sei $n \in \mathbb{N}$. Für jedes n -Tupel $(i_1, \dots, i_n) \in \{0, 1\}^n$ definieren wir, welche Teilmengen von M^n wir (i_1, \dots, i_n) -Zellen nennen.*

- (a) *Fall $n = 0$: Die Menge M^0 ist eine $()$ -Zelle.*
- (b) *Fall $n = 0, i_n = 0$: Eine $(i_1, \dots, i_{n-1}, 0)$ -Zelle ist ein Graph einer Funktion $f \in C(B)$, wobei B eine (i_1, \dots, i_{n-1}) -Zelle ist:*

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}.$$

- (c) *Fall $n = 0, i_n = 1$: Eine $(i_1, \dots, i_{n-1}, 1)$ -Zelle ist ein Intervall zwischen zwei Funktionen $f, g \in C_\infty(B)$ (mit $f < g$), wobei B eine (i_1, \dots, i_{n-1}) -Zelle ist:*

$$(f, g) = \{(x, y) \in B \times M \mid f(x) < y < g(x)\}.$$

Definition 2.2.4 Eine **Zellzerlegung** von M^n ist eine Partition von M^n in endlich viele Zellen der folgenden Form:

- (a) Fall $n = 0$: Die einzige Zellzerlegung von M^0 besteht nur aus M^0 selbst.
- (b) Fall $n \geq 1$: Eine Zellzerlegung von M^n erhält man wie folgt:
 - Man wähle eine Zellzerlegung B_1, \dots, B_k von M^{n-1}
 - Für jede dieser Zellen B_i wähle man Funktionen $f_{i,1}, \dots, f_{i,\ell_i} \in C_\infty(B_i)$ mit $f_{i,1} < \dots < f_{i,\ell_i}$.
 - Daraus erhält man eine Zellzerlegung, die aus den folgenden Mengen besteht: für jedes i die Mengen $(-\infty, f_{i,1})$, $\text{gr}(f_{i,1})$, $(f_{i,1}, f_{i,2})$, $\text{gr}(f_{i,2})$, \dots , $\text{gr}(f_{i,\ell_i-1})$, $(f_{i,\ell_i-1}, f_{i,\ell_i})$, $\text{gr}(f_{i,\ell_i})$, $(f_{i,\ell_i}, +\infty)$.

Satz 2.2.5 (Zellzerlegung für definierbare Mengen) Sind $X_1, \dots, X_\ell \subseteq M^n$ definierbare Mengen, so existiert eine Zellzerlegung von M^n , die mit jeder dieser Mengen X_i **kompatibel** ist, d. h. X_i ist eine Vereinigung von Zellen.

Satz 2.2.6 (Zellzerlegung für eine definierbare Funktion) Ist $f: M^n \rightarrow M$ eine definierbare Funktion, so existiert eine Zellzerlegung von M^n , so dass die Einschränkung von f auf jede Zelle stetig ist.

Bemerkung 2.2.7 $(1, \dots, 1)$ -Zellen sind offen; alle anderen Zellen haben leeres Inneres.

Korollar 2.2.8 Sind $X, Y \subseteq M^n$ definierbare Mengen mit $X \cup Y = M^n$, so hat mindestens eine der beiden Mengen nicht-leeres Inneres.

Korollar 2.2.9 Ist $f: M^n \rightarrow M$ definierbar, so ist f fast überall stetig, im Sinne von: Die Menge der Unstetigkeitsstellen von f hat leeres Inneres.

Korollar 2.2.10 („Endlichkeitslemma“) Ist $\phi(\underline{x}, \underline{y})$ eine Formel, so dass $\phi(\underline{a}, \mathcal{M})$ endlich ist für alle $\underline{a} \in M^m$, so existiert eine uniforme Schranke an die Kardinalitäten dieser Menge, d. h. es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $\underline{a} \in M^m$ gilt: $\#\phi(\underline{a}, \mathcal{M}) \leq N$.

Korollar 2.2.11 Ist eine Struktur \mathcal{M} o -minimal, so ist sogar $\text{Th}(\mathcal{M})$ o -minimal (d. h. alle $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ sind auch o -minimal).

Lemma 2.2.12 Sei Z eine (i_1, \dots, i_n) -Zelle, und sei $\pi: M^n \rightarrow M^m$ die Projektion auf diejenigen Koordinaten, für die $i_k = 1$ ist. Dann induziert π einen Homöomorphismus von Z nach $\pi(Z)$, und $\pi(Z)$ ist eine offene Zelle.

Lemma 2.2.13 Jede Zelle ist definierbar zusammenhängend.

2.3 Zell-Zerlegung: die Beweise

Lemma 2.3.1 Sei $f: M^m \times M \rightarrow M$ so, dass für alle $(\underline{a}, b) \in M^m \times M$ gilt:

- $f(\cdot, b): M^m \rightarrow M$ ist stetig.
- $f(\underline{a}, \cdot): M \rightarrow M$ ist stetig und monoton.

Dann ist f stetig.

2.4 Dimension

Notation 2.4.1 Ist $X \subseteq M^{m+n}$ und $\underline{a} \in M^m$, so setze $X_{\underline{a}} := \{\underline{b} \in M^n \mid (\underline{a}, \underline{b}) \in X\}$.

Definition 2.4.2 Die Dimension $\dim X$ einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ ist definiert als die größte Zahl d , so dass eine definierbare Abbildung $f: X \rightarrow M^d$ existiert, bei der $f(X)$ nicht-leeres Inneres hat. Außerdem setzen wir $\dim \emptyset := -\infty$.

Lemma 2.4.3 Seien $X, Y \subseteq M^n$ definierbar und sei $f: X \rightarrow Y$ eine definierbare Bijektion. Dann gilt: X hat nicht-leeres Inneres genau dann, wenn Y nicht-leeres Inneres hat.

Satz 2.4.4 Seien X und Y definierbare Mengen. Die Dimension hat folgende Eigenschaften:

- $\dim M^n = n$
- X ist endlich genau dann, wenn $\dim X \leq 0$ ist.
- Ist $f: X \rightarrow Y$ eine definierbare Bijektion, so ist $\dim X = \dim Y$.
- Ist $X \subseteq Y$, so gilt $\dim X \leq \dim Y$.
- $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}$.
- $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$.
- Ist $f: X \rightarrow Y$ definierbar und gilt $\dim f^{-1}(b) = d$ für alle $b \in Y$, so ist $\dim X = d + \dim Y$.

Lemma 2.4.5 Die Dimension einer (i_1, \dots, i_n) -Zelle ist $i_1 + \dots + i_n$. Die Dimension einer beliebigen definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ lässt sich an einer dazupassenden Zellzerlegung $(Z_j)_j$ ablesen:

$$\dim X = \max\{\dim Z_j \mid Z_j \subseteq X\}.$$

Satz 2.4.6 Dimension ist uniform definierbar: Ist $\phi(\underline{x}, y)$ eine Formel, so existiert für jedes $d \in \mathbb{N}$ eine Formel $\psi_d(y)$, so dass für alle Modelle $\mathcal{M}' \equiv \mathcal{M}$ und alle $\underline{b} \in (\mathcal{M}')^m$ gilt: $\dim \phi(\mathcal{M}', \underline{b}) = d$ genau dann, wenn $\mathcal{M}' \models \psi_d(\underline{b})$.

Lemma 2.4.7 Für $X \subseteq M^n$ definierbar gilt: $\dim X \geq d$ genau dann, wenn eine Projektion $\pi: M^n \rightarrow M^d$ auf eine Teilmenge der Koordinaten existiert, so dass $\pi(X)$ nicht-leeres Inneres hat.

Satz 2.4.8 Sei $X \subseteq M^n$ definierbar. Dann ist $\dim(X^{\text{cl}} \setminus X) < \dim X$.

Lemma 2.4.9 Sei $X \subseteq M \times M^{n-1}$ definierbar. Dann gilt für fast alle $a \in M$: $(X^{\text{cl}} \setminus X)_a = X_a^{\text{cl}} \setminus X_a$.

2.5 Mehr definierbare Topologie

In diesem Abschnitt nehmen wir an, dass \mathcal{M} eine angeordnete abelsche Gruppe ist und insbesondere $L \supseteq L_{\text{oag}}$.

Lemma 2.5.1 Ist $X \subseteq M^{m+n}$ definierbar und $\pi: M^{m+n} \rightarrow M^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten, so existiert eine definierbare Funktion $f: \pi(X) \rightarrow M^n$ mit $\text{gr } f \subseteq X$. (Eine solche Funktion f heißt **definierbare Auswahlfunktion** oder auch **definierbare Skolemfunktion**.)

Satz 2.5.2 (Kurvenauswahl) Sei $X \subseteq M^n$ definierbar und $\underline{a} \in X^{\text{cl}}$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine stetige definierbare Funktion $\gamma: (0, \epsilon) \rightarrow X$ so, dass $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma(t) = \underline{a}$ ist.

Definition 2.5.3 Für $\underline{a} \in M^n$ setze $\|\underline{a}\| := \max_i |a_i|$.

Definition 2.5.4 Eine Teilmenge $X \subseteq M^n$ heißt beschränkt, wenn ein $R \in M$ existiert, so dass $\|\underline{a}\| < R$ ist für alle $\underline{a} \in X$.

Satz 2.5.5 Ist $f: X \rightarrow M^n$ eine stetige definierbare Funktion auf einer definierbaren beschränkten und abgeschlossen Menge $X \subseteq M^m$, so ist auch $f(X)$ beschränkt und abgeschlossen.

Korollar 2.5.6 Eine stetige definierbare Funktion $f: X \rightarrow M$ auf einer definierbaren beschränkten und abgeschlossen Menge $X \subseteq M^m$ nimmt ein Minimum und ein Maximum an.

Lemma 2.5.7 Ist $X \subseteq M^n$ definierbar, beschränkt und abgeschlossen und ist $\pi: M^n \rightarrow M^m$ die Projektion auf die ersten m Koordinaten (für ein $m \leq n$), so ist auch $\pi(X)$ abgeschlossen.

2.6 Triangulierungen

Definition 2.6.1 Wir sagen, dass zwei definierbare Mengen $X \subseteq M^n, X' \subseteq M^{n'}$ den selben **definierbaren Homöomorphietyp** haben, wenn ein definierbarer Homöomorphismus von X nach X' existiert.

Satz 2.6.2 Sei $X \subseteq M^{m+n}$ definierbar. Dann haben die Mengen $X_{\underline{a}} \subseteq M^n$ für $\underline{a} \in M^m$ (siehe Notation 2.4.1) nur endlich viele verschiedene definierbare Homöomorphietypen.

Definition 2.6.3 (a) Zu jeder nicht-leeren Teilmenge $I \subseteq \{1, \dots, N\}$ definieren wir einen zugehörigen (offenen) **Standard-Simplex** in M^N wie folgt:

$$\Delta_I := \{\underline{a} \in M^N \mid \sum_{i=1}^N a_i = 1 \quad \wedge \quad a_i > 0 \text{ für } i \in I \quad \wedge \quad a_i = 0 \text{ für } i \notin I.\}$$

(b) Eine (**definierbare**) **Triangulierung** einer definierbaren Menge $X \subseteq M^n$ ist ein definierbarer Homöomorphismus $\tau: X \rightarrow \tau(X) \subseteq M^N$ (für ein geeignetes N), so dass $\tau(X)$ eine Vereinigung von Standard-Simplizes ist. Ein Simplex der Triangulierung ist das Urbild $\tau^{-1}(\Delta_I)$ eines Standard-Simplexes Δ_I .

Satz 2.6.4 Sind $X_1, \dots, X_\ell \subseteq M^n$ definierbar, so existiert eine Triangulierung von M^n , so dass jedes X_i eine Vereinigung von Simplizes ist.

Korollar 2.6.5 Unter allen definierbaren Mengen existieren nur abzählbar viele verschiedene definierbare Homöomorphietypen.

3 \mathbb{R}_{exp} ist o-minimal

3.1 Ziel

In diesem Abschnitt sei $L = L_{\text{ring}} \cup \{\text{exp}\}$. Wenn wir \mathbb{R} als L -Struktur auffassen, nennen wir es \mathbb{R}_{exp} . Wir setzen $T_{\text{exp}} := \text{Th}(\mathbb{R}_{\text{exp}})$.

Satz 3.1.1 T_{exp} ist o-minimal.

Korollar 3.1.2 Seien $N, n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten Mengen der Form $X = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\underline{x}) = 0\}$, wobei f ein beliebiges Polynom über \mathbb{R} mit maximal N Monomen ist. Die so erhaltenen Mengen V haben nur endlich viele verschiedene Homöomorphietypen (bei festen N und n).

Allgemeiner gilt eine entsprechende Aussagen auch für Mengen X , die durch boolsche Kombinationen von beschränkt vielen polynomialen Gleichungen und Ungleichungen gegeben sind.

3.2 T_{exp} ist modellvollständig

Definition 3.2.1 Eine Theorie T heißt **modellvollständig**, wenn gilt: Ist M ein Modell, und ist $M_0 \subseteq M$ eine Unterstruktur, die auch ein Modell ist, so ist M_0 bereits eine elementare Unterstruktur.

Satz 3.2.2 Für eine Theorie T sind äquivalent:

- (a) T ist modellvollständig.
- (b) Jede L -Formel $\phi(\underline{x})$ ist, modulo T , zu einer **existentiellen Formel** äquivalent, d. h. zu einer Formel der Form $\exists \underline{y} \psi(\underline{x}, \underline{y})$, für ψ quantorenfrei.
- (c) Jede L -Formel $\phi(\underline{x})$ ist, modulo T , zu einer **universellen Formel** äquivalent, d. h. zu einer Formel der Form $\forall \underline{y} \psi(\underline{x}, \underline{y})$, für ψ quantorenfrei.
- (d) Sind $M_0 \subseteq M$ Modelle von T , so gilt für existentielle $L(M_0)$ -Aussagen ϕ : $M \models \phi \Rightarrow M_0 \models \phi$.

Satz 3.2.3 T_{exp} ist modellvollständig.

Satz 3.2.4 \mathbb{R}_{an} ist o-minimal.

Definition 3.2.5 Sei $M_0 \models T_{\text{exp}}$. Ein **Quasi-Polynom** in x_1, \dots, x_n über M_0 ist ein Polynom in $M_0[x_1, \dots, x_n, e^{x_1}, \dots, e^{x_n}] =: M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$.

Lemma 3.2.6 Jede existentielle Formel $\phi(\underline{x})$ ist äquivalent zu einer Formel der Form $\exists \underline{y}: q(\underline{x}, \underline{y}) = 0$, für ein Quasipolynom q .

Korollar 3.2.7 Satz 3.2.3 folgt aus der folgenden Aussage:

Sind $M_0 \subseteq M$ Modelle von T_{exp} , so hat jedes Quasi-Polynom $q \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ mit Nullstellen in M^n bereits eine Nullstelle in M_0^n .

Definition 3.2.8 Sind $q_1, \dots, q_m \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$, so fassen wir $\underline{q} = (q_1, \dots, q_m)$ als Abbildung $M^n \rightarrow M^m$ auf und setzen:

- (a) $V(\underline{q}) := \{\underline{a} \in M^n \mid \underline{q}(\underline{a}) = 0\}$
- (b) $V^{\text{reg}}(\underline{q}) = \{\underline{a} \in V(\underline{q}) \mid \text{rk}((D\underline{q})(\underline{a})) = m\}$, wobei $(D\underline{q})(\underline{a}) \in M^{m \times n}$ die totale Ableitung von \underline{q} am Punkt \underline{a} ist.

Lemma 3.2.9 Für $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ gilt: $V^{\text{reg}}(\underline{q}) \subset M_0^n$.

Lemma 3.2.10 Ist $q \in M_0[x_1, \dots, x_n, e^{\dots}]$ so, dass $V(q) \neq \emptyset$ ist, so existiert ein m und $q_1, \dots, q_{n+m} \in M_0[x_1, \dots, x_{n+m}, e^{\dots}]$, so dass $\pi(V^{\text{reg}}(q_1, \dots, q_{n+m})) \cap V(q) \neq \emptyset$ ist, wobei $\pi: M^{n+m} \rightarrow M^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten ist.

Definition 3.2.11 Sei M_0^{conv} die konvexe Hülle von M_0 in M , also $M_0^{\text{conv}} = \bigcup_{a \in (M_0)_{>0}} [-a, a]$.

Lemma 3.2.12 Für $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ gilt $V^{\text{reg}}(\underline{q}) \subset (M_0^{\text{conv}})^n$.

Lemma 3.2.13 Für $q_1, \dots, q_n \in M_0[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$ gilt: Ist $\underline{a} \in V^{\text{reg}}(\underline{q}) \cap (M_0^{\text{conv}})^n$, so ist bereits $\underline{a} \in M_0^n$.

3.3 O-Minimalität

Satz 3.3.1 T_{exp} ist o-minimal.

Lemma 3.3.2 Wir fassen \mathbb{R} auf als L' -Struktur in einer beliebigen Sprache $L' \supset L_{\text{ring}} \cup \{\text{exp}\}$, und wir nehmen an, dass $\mathcal{M}_0 \subseteq \mathcal{M}$ Modelle von $\text{Th}_{L'}(\mathbb{R})$ sind.

Sei $q \in M_0[x_1, \dots, x_n, e^{\dots}]$, und sei $Y \subseteq V(q)$ eine nicht-leere $L'(M)$ -definierbare Teilmenge, die offen und abgeschlossen in $V(q)$ ist. Dann existiert ein m und $q_1, \dots, q_{n+m} \in M_0[x_1, \dots, x_{n+m}, e^{\dots}]$, so dass $\pi(V^{\text{reg}}(q_1, \dots, q_{n+m})) \cap Y \neq \emptyset$ ist, wobei $\pi: M^{n+m} \rightarrow M^n$ die Projektion auf die ersten n Koordinaten ist.

Lemma 3.3.3 Ist $q \in \mathbb{R}[\underline{x}, e^{\underline{x}}]$, so hat $V(q)$ nur endlich viele Zusammenhangskomponenten.