Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 2

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 2.1 (6 Punkte)

Wir betrachten den Operator

$$A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}), \ \ (Af)(x) = x^4 f(x)$$

mit Definitionsbereich $D(A) := C_c^\infty(\mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie die Abschließbarkeit von A unter Verwendung des Kriteriums aus Satz 1.23.

(b) Bestimmen Sie den dualen Operator A'. Sie können dabei ohne weiteren Nachweis die Identifikation des Dualraums

$$L^2(\mathbb{R})' = \{\langle \cdot, g\rangle \ : \ g \in L^2(\mathbb{R})\}$$

bezüglich der dualen Paarung $\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx$ verwenden.

(c) Zeigen sie die Abschließbarkeit erneut unter Verwendung von (b).

[K] Aufgabe 2.2 (2 Punkte)

Seien die Banachräume $X := L^2(\mathbb{R}^2)$ und $Y := \mathbb{R}$ gegeben. Untersuchen Sie den Operator

$$A : D(A) \subset X \to Y, \ \ f \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} f(t)\,dt$$

mit $D(A) := \{f \in L^2(\mathbb{R}^2) \ : \ \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ auf Abschließbarkeit und geben Sie gegebenenfalls den Abschluss (mit Beweis) an.

Aufgabe 2.3

Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ abgeschlossen und injektiv. Die Einbettung $D(A) \hookrightarrow X$ sei kompakt und $D(A)$ sei mit der Graphennorm $\|x\|_G := \|x\|_X + \|Ax\|_X$ ausgestattet.

(a) Zeigen Sie, dass ein $C > 0$ existiert, sodass für alle $x \in D(A)$ gilt:

$$\|x\|_X \leqslant C\|Ax\|_X.$$

Hinweis: Verwenden Sie einen Beweis durch Widerspruch.

(b) Sei zusätzlich $R(A)$ (Bild von A) dicht in X. Zeigen Sie, dass $0 \in \rho(A)$.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass $R(A)$ abgeschlossen ist.

Abgabe bis zum Freitag, den 13. November 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.