Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 3

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 3.1 (2 + 3 Punkte)

Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie:

(a) Jeder beschränkte Operator $A \in \mathscr{L}(X)$ erzeugt eine C_0-Halbgruppe auf X.
Hinweis: Nutzen Sie aus, dass sich $T(t) = \exp(tA)$ als Exponentialreihe darstellen lässt. Zeigen Sie auch, dass A tatsächlich der Erzeuger dieser Halbgruppe ist.

(b) Besitzt eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ die Eigenschaft

$$\|T(t) - I\|_{\mathscr{L}(X)} \xrightarrow{t\to 0} 0,$$

so wird sie von einem beschränkten Operator $A \in \mathscr{L}(X)$ erzeugt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $T \in C([0,\infty), \mathscr{L}(X))$, und anschließend, dass der Erzeuger A auf seinem Definitionsbereich $D(A)$ (vgl. Definition 2.4) beschränkt ist.

[K] Aufgabe 3.2 (3 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $(T(t))_{t\geqslant 0}$ eine C_0-Halbgruppe mit Generator A und Wachstumsschranke $\omega(T) = \omega_0$.
Zeigen Sie: $(\exp(-\lambda t)T(t))_{t\geqslant 0}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf X mit Generator $A - \lambda$ und Wachstumsschranke $\omega(\exp(-\lambda t)T(t)) = \omega_0 - \lambda$.
Hinweis: Sie dürfen die Produktregel aus Aufgabe 3.3 ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 3.3

Seien X ein Banachraum, $t \geqslant 0$ und $S, T : [0,\infty) \to \mathscr{L}(X)$ zwei C_0-Halbgruppen. Zeigen Sie, dass an der Stelle t für alle $x \in X$ die Produktregel gilt:

$$\frac{d}{dt}(T(t)S(t)x) = \dot{T}(t)S(t)x + T(t)\dot{S}(t)x$$

(also insbesondere auch, dass $\tau \to T(\tau)S(\tau)x$ an der Stelle t differenzierbar ist).
Hinweis: Eine C_0-Halbgruppe T ist in einer Umgebung von $t \geqslant 0$ gleichmäßig beschränkt, d.h. es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass $\sup_{|t-\tau|\leqslant\varepsilon} \|T(\tau)\|_{\mathscr{L}(X)} < \infty$.

Abgabe bis zum Freitag, den 20. November 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.