Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 4

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 4.1 (4 Punkte)

Seien X ein Banachraum, $A : D(A) \subset X \to X$ ein dicht definierter, linearer Operator und $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$, sodass $[\omega, \infty) \subset \rho(A)$ und $\|\lambda(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(X)} \leqslant M$ für alle $\lambda > \omega$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\lambda(\lambda - A)^{-1}x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} x$ für alle $x \in X$.

(b) $\lambda A(\lambda - A)^{-1}x = \lambda(\lambda - A)^{-1}Ax \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} Ax$ für alle $x \in D(A)$.

[K] Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Wärmeleitungsgleichung

$$\text{(WLG)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \text{ in} & (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0) = u_0 \text{ in} & \mathbb{R}^n \end{cases}$$

auf $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ wohlgestellt ist. Dabei ist der Laplace-Operator durch

$$A_L : D(A_L) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),\ u \mapsto \Delta u$$

mit Definitionsbereich $D(A_L) = H^2(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ gegeben.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz von Hille-Yosida und die Fourier-Transformation. Betrachten Sie dazu das Resolventenproblem $(\lambda - A_L)u = f$.

Aufgabe 4.3

Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ sowie $B : D(B) \subset X \to X$ lineare Operatoren, sodass B eine Erweiterung von A ist. Weiterhin gebe es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda - B$ injektiv und $\lambda - A$ surjektiv ist. Zeigen Sie, dass dann schon $A = B$ folgt.

Abgabe bis zum Freitag, den 27. November 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.