Übungsblatt 5

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] **Aufgabe 5.1** (2+2+2 Punkte)

Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ Generator einer C_0-Halbgruppe auf X. Sei $A' : D(A') \subset X' \to X'$ der adjungierte Operator. Zeigen Sie:

(a) Die Familie $(T(t)')_{t \geqslant 0} \subset \mathscr{L}(X')$ erfüllt die C_0-Halbgruppen-Eigenschaften bis auf die starke Stetigkeit.

(b) Ist die Familie $(T(t)')_{t \geqslant 0}$ stark stetig, so ist A' der Erzeuger.

(c) Ist A' dicht definiert, so ist $(T(t)')_{t \geqslant 0}$ stark stetig.

[K] **Aufgabe 5.2** (2 Punkte)

Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ ein linearer, abgeschlossener und dicht definierter Operator mit $\rho(A) \neq \varnothing$. Beweisen Sie, dass für alle $\mu \in \rho(A)$

$$\sigma((\mu - A)^{-1}) \setminus \{0\} = \left\{ \frac{1}{\mu - \lambda} \ : \ \lambda \in \sigma(A) \right\}.$$

Aufgabe 5.3

Sei $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Für $f \in L^p(\Omega)$ sei

$$\varphi_f(x) := \begin{cases} \|f\|_p^{2-p} \, \overline{f(x)} \, |f(x)|^{p-2}, & f(x) \neq 0 \\ 0, & f(x) = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\varphi_f \in J(f)$.

Abgabe bis zum Freitag, den 04. Dezember 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.