Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 6

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 6.1 (5 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen

$$\text{(WLG)} \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \Omega \\ \partial_\nu u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \partial\Omega \\ u(0) = u_0 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Die L^2-Realisierung des Laplace-Operators mit Neumann-Randbedingungen ist gegeben durch

$$A_{L,N} : D(A_{L,N}) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega),\ u \mapsto \Delta u$$

mit $D(A_{L,N}) := \{u \in H^1(\Omega) : \partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0, \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Dabei ist die Randbedingung wie folgt zu verstehen:

$$\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = 0 \ :\Leftrightarrow (\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} = -(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \ \forall v \in H^1(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass (WLG) in $L^2(\Omega)$ wohlgestellt ist.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Lax-Milgram an.

[K] Aufgabe 6.2 (3 Punkte)

Sei $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Der Laplace-Operator mit Dirichlet-Randbedingungen auf Ω ist in $L^p(\Omega)$ gegeben durch

$$A_{L,D} : D(A_{L,D}) \subset L^p(\Omega) \to L^p(\Omega),\ u \mapsto \Delta u$$

mit Definitionsbereich $D(A_{L,D}) = \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \Delta u \in L^p(\Omega)\}$. Dabei ist $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$.
Alle Räume seien reell angenommen. Zeigen Sie, dass $A_{L,D}$ dissipativ ist.
Hinweis: Sie können Aufgabe 3 von Blatt 5 verwenden.

Aufgabe 6.3

Sei A_S wie in Beispiel 3.6(a) aus dem Skript als der Schrödinger-Operator auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $D(A_S) = H^2(\mathbb{R}^n)$ gegeben:

$$A_S : D(A_S) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n), \quad A_S u := i\Delta u.$$

Aus dem Beispiel wissen wir bereits, dass A_S eine C_0-Kontraktionshalbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ erzeugt. Zeigen Sie, dass

$$T(t) = \mathscr{F}^{-1} \exp(-i|\xi|^2 t)\mathscr{F}$$

für $t \geqslant 0$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathscr{F}^{-1} \exp(-i|\xi|^2 t)\mathscr{F}$ eine C_0-Kontraktionshalbgruppe auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ mit Generator $B : D(B) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ ist. Weisen Sie anschließend nach, dass $A_S = B$.

Abgabe bis zum Freitag, den 11. Dezember 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.