Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 7

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 7.1 (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum und sei $A : D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator. Zeigen Sie, dass $D(A^k)$ mit der Norm

$$\|x\|_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|_X$$

ein Banachraum ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Einbettung $D(A^k) \subset D(A^l)$ stetig ist für $k \geqslant l$.

[K] Aufgabe 7.2 (4 Punkte)

Seien $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und X, Y komplexe Banachräume. Zeigen Sie, dass für eine Funktion $f : G \to \mathscr{L}(X, Y)$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f : G \to \mathscr{L}(X, Y)$ ist holomorph.

(ii) $z \mapsto f(z)x : G \to Y$ ist holomorph für alle $x \in X$.

Zeigen Sie dazu auch, dass

$$\left(\int_\gamma f(\varphi)\, d\varphi \right) x = \int_\gamma f(\varphi) x \, d\varphi$$

für jeden Zyklus in G und jedes $x \in X$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie für die Implikation (ii) $\Rightarrow$ (i) eine ähnliche Technik wie in Schritt 1 des Beweises von Satz 5.5 und nehmen Sie dazu ohne Einschränkung $f(0) = 0$ an, um

$$\left\| \frac{f(z)x}{z} \right\|_Y < \infty$$

für $x \in X$ auf einer kleinen Kugel zu zeigen. Verwenden Sie dann das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, um eine Schranke für $f(z)/z$ zu erhalten.

Aufgabe 7.3

Sei $A : D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X. Sei $\lambda \in \rho(A)$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass

$$(\lambda - A)^{-k} : X \to D(A^k)$$

ein Isomorphismus ist. Dabei sei $D(A^k)$ mit der in Aufgabe 7.1 beschriebenen Norm ausgestattet.

Abgabe bis zum Freitag, den 18. Dezember 2020, 11.00 Uhr über das Ilias-System.