Übungsblatt 8

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 8.1 (2 Punkte)

Seien X ein normierter Raum über $\mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to X$ eine beschränkte ganze Funktion, d.h., f sei holomorph auf $\mathbb{C}$ und es existiert ein $C > 0$, sodass $\|f(z)\|_X \leqslant C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.
Hinweis: Denken Sie an den Satz von Liouville aus der Funktionentheorie.

[K] Aufgabe 8.2 (2+2+2 Punkte)

Seien X ein Banachraum und $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet. Betrachte den beschränkten Dunford-Kalkül

$$\Psi : \mathscr{H}(\Omega) \to \mathscr{L}(X),\ f \mapsto f(A).$$

Zeigen Sie für $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Omega$ folgende Aussagen:

(i) $f(z) = 1$ ist holomorph auf Ω und es gilt $f(A) = \mathrm{Id}_X$.

(ii) $f(z) = z$ ist holomorph auf Ω und es gilt $f(A) = A$.

(iii) $f(z) = \frac{1}{\mu+z}$ ist für $-\mu \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ holomorph auf Ω und es gilt $f(A) = (\mu + A)^{-1}$.

Hinweis: Betrachten Sie in (i) zunächst den Fall $\Omega = B_R(0)$ für ein $R > 0$ und schreiben Sie die Resolvente $(\lambda - A)^{-1}$ mit der Neumannschen Reihe in Reihenform. Verwenden sie (i) zur Lösung von (ii) und (iii).

Aufgabe 8.3

Sei $A : D(A) \subset X \to X$ ein linearer Operator im Banachraum X, der Eigenschaft (5-4) aus dem Skript erfüllt. Zeigen Sie:

(i) Es gilt

$$x \in \overline{D(A)} \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} s(s+A)^{-1}x = x \Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} A(s+A)^{-1}x = 0.$$

(ii) $N(A^n) = N(A)$ für $n \in \mathbb{N}$.

Wir wünschen allen Studierenden ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Übergang in das neue Jahr 2021!

Abgabe bis zum Freitag, den 08. Januar 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.