

## Übungsblatt 9

**Hinweis:** Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] **Aufgabe 9.1** (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass der negative Schrödinger-Operator

$$-A_S : D(A_S) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto -i\Delta u$$

mit  $D(A_S) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$  sektoriell ist mit Spektralwinkel  $\varphi_{-A_S} = \pi/2$ .

**Hinweis:** Verwenden Sie die Fouriertransformation, um die Resolvente anzugeben, und Proposition 5.20, um eine geeignete Abschätzung für das Symbol zu finden. Benutzen Sie Lemma 5.18 (v), um zu zeigen, dass  $-A_S$  dichtes Bild hat.

[K] **Aufgabe 9.2** (3 Punkte)

Seien  $X, Y$  Banachräume und  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein linearer Operator. Zeigen Sie:

(i)  $A \in \Psi S(X)(S(X)) \Rightarrow \mu A \in \Psi S(X)(S(X))$  für  $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$  und  $\varphi_{\mu A} \leq \varphi_A + |\arg \mu|$ .

(ii) Sei  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiv. Dann gilt

$$A \in \Psi S(X)(S(X)) \Leftrightarrow TAT^{-1} \in \Psi S(Y)(S(Y))$$

und  $\varphi_{TAT^{-1}} = \varphi_A$ .

### Aufgabe 9.3

Seien  $X$  ein komplexer Banachraum und  $A \in \mathcal{L}(X)$  mit  $\sigma(A) \subset \Sigma_\varphi$  für ein  $0 < \varphi < \pi$ . Zeigen Sie, dass  $A$  sektoriell ist mit Spektralwinkel  $\varphi_A \leq \varphi$ .

**Hinweis:** Setzen Sie  $f_\mu(z) = \mu(\mu + z)^{-1}$  für  $z \in \Sigma_{\varphi-\varepsilon}$  (mit passender Wahl des  $\varepsilon$ ) und  $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi}$  und zeigen Sie mit Hilfe des Funktionalkalküls von Dunford, dass  $\|f_\mu(A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C \|f_\mu\|_{L^\infty(\Sigma_{\varphi-\varepsilon})}$ .

Abgabe bis zum Freitag, den 15. Januar 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.