

Übungsblatt 10

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 10.1 (4 Punkte)

Seien X ein komplexer Banachraum und $A \in \Psi S(X)$ beschränkt und invertierbar mit Spektralwinkel $0 \leq \varphi_A < \pi$. Sei $\varphi_A < \varphi < \pi$. Für einen Winkel $\varphi_A < \psi < \varphi$ und $0 < r < R$ seien γ_ψ und $\gamma_{\psi,r,R}$ die Kurven aus dem Beweis von Satz 5.25. Zeigen Sie, dass mit $f \in \mathcal{H}_0(\Sigma_\varphi)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,r,R}} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda \longrightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\psi} f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda$$

für $r \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie die Differenz der beiden Integrale und insbesondere die daraus resultierende Differenz der Kurven γ_ψ und $\gamma_{\psi,r,R}$. Zerlegen Sie die resultierende Kurve geeignet, um die Grenzwerte zu untersuchen.

[K] Aufgabe 10.2 (4 Punkte)

Sei X ein komplexer Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ ein pseudo-sektorieller Operator mit Spektralwinkel φ_A . Zeigen Sie, dass es zu jedem $\mu \in \Sigma_{\pi-\varphi_A}$ ein $\psi > \varphi_A$ und ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$(\mu + A)^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\psi,\delta}} \frac{1}{\lambda + \mu} (\lambda - A)^{-1} d\lambda,$$

wobei $\gamma_{\psi,\delta}$ der Weg aus Satz 5.31 sei.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $f(\lambda) := 1/(\lambda + \mu)$ auf einem geeigneten Sektor Σ_φ und nutzen Sie den Funktionalkalkül aus Satz 5.31.

Aufgabe 10.3

Seien X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ sektoriell mit Winkel φ_A . Sei weiter $\varphi \in (\varphi_A, \pi)$ und definiere die Abbildung $h : \Sigma_\varphi \rightarrow \Sigma_\varphi$ durch die Vorschrift $z \mapsto 1/z$. Zeigen Sie, dass mit dem Dunford-Kalkül für pseudo-sektorielle Operatoren gilt:

$$(f \circ h)(A) = f(A^{-1}).$$

Abgabe bis zum Freitag, den 22. Januar 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.