Partielle Differentialgleichungen 1
Prof. Dr. Jürgen Saal
Christian Gesse

WS 2020/21

Übungsblatt 11

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 11.1 (4 Punkte)

Seien X ein komplexer Banachraum und T eine beschränkte holomorphe Halbgruppe auf X mit Winkel θ. Zeigen Sie:

(i) $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$ für alle $z_1, z_2 \in \Sigma_\theta$.

(ii) Für $0 < \tilde{\theta} < \theta$ gilt $T(z)x \xrightarrow{\Sigma_{\tilde{\theta}} \ni z \to 0} x$ für alle $x \in X$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis die beiden folgenden aus der Funktionentheorie stammenden und auch auf Banachräumen gültigen Aussagen verwenden (es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und X ein komplexer Banachraum):

(1) Seien $f, g : \Omega \to X$ holomorph mit $f = g$ auf einer Menge $U \subset \Omega$, die einen Häufungspunkt in Ω besitzt. Dann gilt $f = g$.

(2) Sei $f_k : \Omega \to X$, $k \in \mathbb{N}$ eine lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen, sodass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf einer Teilmenge $U \subset \Omega$, die mindestens einen Häufungspunkt besitzt, punktweise konvergiert. Dann gibt es eine holomorphe Funktion $f : \Omega \to X$, sodass $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ lokal gleichmäßig.

Es gibt auch eine Möglichkeit, Teil (ii) ohne (2) zu lösen.

[K] Aufgabe 11.2 (4 Punkte)

Sei $(T(t))_{t\geqslant 0}$ eine differenzierbare C_0-Halbgruppe (T erfülle also (5-21) in Bemerkung 5.35(i)) mit Erzeuger A auf einem komplexen Banachraum X. Zeigen Sie:

(i) $AT(t) \in \mathscr{L}(X)$ für alle $t > 0$.

(ii) $[t \to T(t)] \in C((0, \infty), \mathscr{L}(X))$.

(iii) $[t \to T(t)] : (0, \infty) \to \mathscr{L}(X)$ ist differenzierbar mit $\frac{d}{dt}T(t) = AT(t)$ für alle $t > 0$.

Aufgabe 11.3

Seien X ein komplexer Banachraum und $(T(t))_{t\geqslant 0}$ eine differenzierbare C_0-Halbgruppe. Zeigen Sie $[t \to T(t)] \in C^\infty((0, \infty), \mathscr{L}(X))$ mit $T^{(n)}(t) = A^n T(t)$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie weiterhin, dass für alle $t > 0$

$$\frac{d^n}{dt^n}(AT(t)) = AT^{(n)}(t).$$

Abgabe bis zum Freitag, den 29. Januar 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.