Übungsblatt 1

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 25.04.17 zu Beginn der Vorlesung

Aufgabe 1: (2P+2P)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Gilt $\omega(T) = 0$ für die Wachstumsschranke einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf einem Banachraum X, so ist $(T(t))_{t\geqslant 0}$ beschränkt.

(b) Ist eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$ auf einem Banachraum X asymptotisch stabil und hat X endliche Dimension, so ist $(T(t))_{t\geqslant 0}$ gleichmäßig stabil.

Aufgabe 2: (Stabilität Wärmeleitungshalbgruppe)(4P+2P+4P+4P+2P)
Der Laplaceoperator

$$A_L : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto \Delta u$$

erzeugt eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $T(t)f = \mathscr{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} f$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $t \geqslant 0$.

(b) $T(t)f = G_t * f$ für alle $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $t \geqslant 0$.

(c) $(T(t))_{t\geqslant 0}$ ist asymptotisch stabil.

(d) $(T(t))_{t\geqslant 0}$ ist nicht exponentiell stabil.

(e) Geben Sie die Wachstumsschranke $\omega(T)$ an.

Hinweis: Schauen Sie für Aufgabenteil (b) ggf. in den Anhang C des Vorlesungsskriptes.

Aufgabe 3: (Stabilität Schrödingerhalbgruppe)(2P)
Der Schrödingeroperator

$$A_S : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto i\Delta u$$

erzeugt die C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geqslant 0}$, die durch

$$\mathscr{F}^{-1} e^{-it|\xi|^2} \mathscr{F} f$$

für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und $t \geqslant 0$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass diese nicht asymptotisch stabil ist.