# Übungsblatt 10

## Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

**Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus**

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 27.06.17 in der Übung

**Aufgabe 1:** (1P+2P)

*Ist $X$ ein Banachraum, $a < b$, $f \in L^1((a,b),X)$ und $F(t) := \int_a^t f(s)ds$ für $t \in [a,b]$, so ist $F$ fast überall (Fréchet-)differenzierbar mit $F' = f$ fast überall.*[1]

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist $T \in (0,\infty]$, $1 \leqslant p < \infty$, $X$ ein Banachraum und $u \in W^{1,p}((0,T),X)$, so ist $u$ fast überall (Fréchet-)differenzierbar und für fast alle $t \in (0,T)$ stimmt die Fréchet-Ableitung mit der schwachen Ableitung $u' \in L^p((0,T),X)$ überein.

(b) Sei $X$ ein Banachraum, $T \in (0,\infty)$, $1 \leqslant p < \infty$ und $A : D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann maximale Regularität auf $(0,T)$ hat, wenn

$$L : \mathbb{E}_T \longrightarrow \mathbb{F}_T, \quad u \longmapsto \begin{pmatrix} (\frac{d}{dt} + A)u \\ u(0) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist, wobei $\mathbb{E}_T = W^{1,p}((0,T),X) \cap L^p((0,T),D(A))$, $\mathbb{F}_T = L^p((0,T),X) \times I_p(A)$.

*Hinweis:* Eine Implikation aus (b) haben wir bereits in der Vorlesung gezeigt.

**Aufgabe 2:** (Maximale Regularität auf endlichen Zeitintervallen)(4P)
Sei $X$ ein Banachraum, $1 \leqslant p < \infty$, $T \in (0,\infty)$ und $A : D(A) \subset X \to X$ ein abgeschlossener Operator. Zeigen Sie, dass $A$ genau dann maximale Regularität auf $(0,T)$ hat (also $A \in \mathrm{MR}(X, C(T))$ mit einer Kostanten $C(T) > 0$), wenn $A$ maximale Regularität auf $(0,T')$ für jedes $T' \in (0,\infty)$ hat (also $A \in \mathrm{MR}(X, C(T'))$ mit $C(T') > 0$).

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass man die Lösung $u$ des Cauchyproblems auf $(0,T)$ fortsetzen kann zu einer Lösung auf $(0, T+T_1)$ für ein $T_1 < T$.

**Aufgabe 3:** (Maximale Regularität für $\Delta^2$)(4P)
Zeigen Sie, dass der Operator

$$A : D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto \Delta^2 u$$

für $1 < p < \infty$ und $D(A) := W^{4,p}(\mathbb{R}^n)$ maximale Regularität auf $(0,\infty)$ hat (also $A \in \mathrm{MR}(L^p(\mathbb{R}^n))$).

*Hinweis:* Verwenden Sie die Sätze 9.43 und 9.45.

**Aufgabe 4:** (Maximale Regularität für $\Delta^2$ mit Störung)(4P)
Sei $1 < p < \infty$ und $A = \Delta^2$ der Operator aus Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass es zu jedem $T \in (0,\infty)$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$\overline{L} : \mathbb{E}_T \longrightarrow \mathbb{F}_T, \quad u \longmapsto \begin{pmatrix} \dot{u} + \Delta^2 u + a \cdot \Delta u \\ u(0) \end{pmatrix}$$

für alle $a \in L^\infty((0,T), L^\infty(\mathbb{R}^n))$ mit $\|a\|_\infty \leqslant \varepsilon$ ein Isomorphismus ist.

*Hinweis:* Verwenden Sie Aufgabe 3 und den Satz über die Neumann'sche Reihe.

[1] Siehe: Arendt & Batty & Hieber & Neubrander, Vector-valued Laplace Transforms and Cauchy Problems, Prop. 1.2.2.