Übungsblatt 11

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 04.07.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Fortsetzungsoperator)(4P)
Sei X ein Banachraum, $T \in (0,\infty)$ und ${}_0W^{1,p}((0,T),X) := \{u \in W^{1,p}((0,T),X) \mid u(0) = 0\}$. Für eine Funktion $u : [0,T] \to X$ definieren wir

$$E_T u(t) := \begin{cases} 0, & -\infty < t < 0 \text{ oder } 2T \leqslant t < \infty \\ u(t), & 0 \leqslant t < T \\ u(2T-t), & T \leqslant t < 2T. \end{cases}$$

Zeigen Sie für $1 \leqslant p < \infty$, dass sowohl

$$E_T : L^p((0,T),X) \longrightarrow L^p((a,b),X)$$

als auch

$$E_T : {}_0W^{1,p}((0,T),X) \longrightarrow W^{1,p}((a,b),X)$$

für alle $-\infty \leqslant a \leqslant 0 < T \leqslant b \leqslant \infty$ ein Fortsetzungsoperator (d.h. ein stetiger linearer Operator mit $E_T u|_{(0,T)} = u$) ist. Zeigen Sie weiterhin, dass es ein von den Intervallen $(0,T)$ und (a,b) unabhängiges $C > 0$ gibt, sodass $\|E_T\|_{\mathscr{L}(L^p((0,T),X),L^p((a,b),X))} \leqslant C$ und $\|E_T\|_{\mathscr{L}({}_0W^{1,p}((0,T),X),W^{1,p}((a,b),X))} \leqslant C$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zuerst für den Fall $(a,b) = \mathbb{R}$ und verwenden Sie, dass $C^\infty([0,T],X)$ dicht in $W^{1,p}((0,T),X)$ liegt.

Aufgabe 2: (Soboleveinbettung mit Zeitspur 0 und Poincaré-Ungleichung)(2P+2P)
Sei X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $T_0 \in (0,\infty)$ gilt die Soboleveinbettung

$${}_0W^{1,p}((0,T),X) \hookrightarrow C([0,T],X)$$

gleichmäßig in $T \in (0,T_0]$, d.h. es gibt ein $C > 0$, sodass $\|u\|_{C([0,T],X)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}((0,T),X)}$ für alle $u \in {}_0W^{1,p}((0,T),X)$ und für alle $T \in (0,T_0]$ gilt.

(b) Für $T \in (0,\infty)$ gilt die Poincaré-Ungleichung

$$\|u\|_{L^p((0,T),X)} \leqslant T\|\dot{u}\|_{L^p((0,T),X)}$$

für alle $u \in {}_0W^{1,p}((0,T),X) = \{u \in W^{1,p}((0,T),X) \mid u(0) = 0\}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1, um (a) zu lösen.

Aufgabe 3: ($\mathcal{R}$-sektorielle stetige Operatoren)(4P)
Sei X ein Banachraum und $A \in \mathscr{L}(X)$ mit $\sigma(A) \subset \Sigma_\varphi$ für einen Winkel $\varphi \in (0,\pi)$. Zeigen Sie, dass A ein $\mathcal{R}$-sektorieller Operator mit $\varphi_A^{\mathcal{R}} \leqslant \varphi$ ist. Insbesondere gilt $A \in \mathrm{MR}(X)$, falls $\varphi < \frac{\pi}{2}$ und X von der Klasse $\mathcal{HT}$ ist.

Zur Erinnerung: Ein linearer und dicht definierter Operator $A : D(A) \subset X \to X$ mit dichtem Bild heißt ($\mathcal{R}$-)sektoriell, wenn es einen Winkel $\varphi \in (0,\pi)$ gibt, sodass $\sigma(A) \subset \overline{\Sigma}_\varphi$ gilt und

$$\{\lambda(\lambda + A)^{-1} : \lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi}\} \subset \mathscr{L}(X) \qquad (*)$$

($\mathcal{R}$-)beschränkt ist. Das Infimum aller $\varphi \in (0,\pi)$, sodass (*) ($\mathcal{R}$-)beschränkt ist wird mit φ_A bzw. $\varphi_A^{\mathcal{R}}$ bezeichnet.

Hinweis: Betrachten Sie für $\lambda \in \Sigma_{\pi-\varphi}$ die Fälle $|\lambda| \leqslant 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$ und $|\lambda| > 2\|A\|_{\mathscr{L}(X)}$. Verwenden Sie Bem. 9.22 (d) für ersteren Fall und stellen Sie $\lambda(\lambda - A)^{-1}$ für letzteren Fall durch die Neumann'sche Reihe dar.