Übungsblatt 12

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 11.07.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Maximale Regularität für parameter-elliptische Operatoren)(4P)
Sei $1 < p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$ und $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0$ mit $|\alpha| = 2m$. Der Operator

$$A : W^{2m,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha \partial^\alpha u$$

sei parameter-elliptisch mit Elliptizitätswinkel ψ_A, d.h. es gibt ein $\psi \in (0, \pi)$ mit

$$\sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (i\xi)^\alpha \subset \Sigma_\psi \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1 \tag{*}$$

und $\psi_A \in [0, \pi)$ ist das Infimum aller $\psi \in (0, \pi)$, die (*) erfüllen. Zeigen Sie, dass A pseudo-$\mathcal{R}$-sektoriell mit $\varphi_A^{\mathcal{R}} \leqslant \psi_A$ ist. Insbesondere gilt also $A \in \mathrm{MR}(L^p(\mathbb{R}^n))$, falls $\psi_A < \frac{\pi}{2}$ ist.

Hinweis: In Abschnitt 7.1 hatten wir gesehen, dass $\|(\lambda + A)\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ für jedes $\lambda \in \Sigma_{\pi-\psi}$ eine äquivalente Norm auf $W^{2m,p}(\mathbb{R}^n)$ darstellt. Desweiteren gibt es für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ eine Konstante $C_{\alpha,\psi} > 0$, sodass

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\xi|^{|\alpha|} |\partial^\alpha m_\lambda(\xi)| \leqslant C_{\alpha,\psi}, \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\pi-\psi}$$

für das Symbol $m_\lambda(\xi) := \frac{\lambda}{\lambda + \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha (i\xi)^\alpha}$ gilt.

Aufgabe 2: (Nemytskijoperatoren in $L^p(\mathbb{R}^n)$)(2P)
Sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ Lipschitzstetig mit $\phi(0) = 0$ und sei $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Zeigen Sie, dass der zugehörige Nemytskijoperator $f \longmapsto [t \mapsto \phi(f(t))] : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ wohldefiniert und Lipschitzstetig ist. Ist die Bedingung $\phi(0) = 0$ notwendig?

Aufgabe 3: (Regularisierung der Wärmeleitungsgleichung)(4P)
Sei $1 < p < \infty$ und $A_L = \Delta$ auf $D(A) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. Sei $u_0 \in I_p(A_L)$. Zeigen Sie für die Lösung $u := e^{tA_L} u_0 \in \mathbb{E}_\infty$ der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= 0, \quad t \in (0, \infty) \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$$

dass $u \in C^\omega((0, \infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Parametertrick: Zeigen Sie für $u_{\lambda,\mu}(t, x) := u(\lambda t, x + t\mu)$, dass die Funktion $(\lambda, \mu) \mapsto u_{\lambda,\mu} : (0, 1 + \delta) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{E}_T$ für $T \in (0, \infty)$ und $\delta > 0$ auf einer geeigneten Umgebung $(1, 0) \in \Lambda \subset (0, 1 + \delta) \times \mathbb{R}^n$ analytisch ist, indem Sie den Satz über implizite Funktionen auf

$$\Psi : (0, 1 + \delta) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{E}_T \longrightarrow \mathbb{F}_T, \quad (\lambda, \mu, w) \longmapsto \begin{pmatrix} \partial_t w - \lambda \Delta w - \mu \cdot \nabla w \\ w(0) - u_0 \end{pmatrix}$$

anwenden.