Übungsblatt 13

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 18.07.17 in der Übung

Aufgabe 1: (3P)
Sei $\varphi \in (0,\pi)$ und $\omega : \Sigma_\varphi \times \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ eine Funktion. Zeigen Sie für

$$v(\xi, y) := \frac{e^{-\omega(\lambda,\xi)|y|}}{2\omega(\lambda,\xi)},$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \Sigma_\varphi$, dass durch $y \mapsto v(\xi,y)$ eine Fundamentallösung zum Differentialoperator

$$L : \mathscr{D}'(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{D}'(\mathbb{R}), \quad u \longmapsto \left(\omega(\lambda,\xi)^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u$$

gegeben ist, d.h. $L[y \mapsto v(\xi,y)] = \delta_0$, wobei $\delta_0 \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ die Dirac-Distribution bezeichnet.

Aufgabe 2: (H^∞-Kalkül für Multiplikationsoperatoren)(4P)
Sei $1 < p < \infty$, $\psi \in (0,\pi)$ und $a \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, \Sigma_\psi)$. Zeigen Sie, dass

$$A : D(A) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad u \mapsto a \cdot u$$

mit $D(A) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^n) : a \cdot u \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$ ein sektorieller Operator mit beschränktem H^∞-Kalkül und $\varphi_A^\infty \leqslant \psi$ ist.

Aufgabe 3: (H^∞-Kalkül für ∂_t)(6P)
Seien $1 < p < \infty$, $k \in \mathbb{N}_0$ und X ein komplexer Banachraum von der Klasse $\mathcal{HT}$. Zeigen Sie, dass

$$B : W^{k+1,p}(\mathbb{R}, X) \subset W^{k,p}(\mathbb{R}, X) \longrightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}, X), \quad u \longmapsto \dot{u}$$

ein sektorieller Operator mit beschränktem H^∞-Kalkül und $\varphi_B^\infty \leqslant \frac{\pi}{2}$ ist.