Übungsblatt 6

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

Abgabe: 30.05.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Wärmeleitungshalbgruppe in L^p)(4P)
Der Laplaceoperator

$$A_{L,p} : W^{2,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n), \quad u \longmapsto \Delta u$$

erzeugt nach Korollar 7.4 für $1 < p < \infty$ eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe $(e^{tA_{L,p}})_{t\geqslant 0}$ vom Winkel $\theta = \frac{\pi}{2}$ auf $L^p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$e^{tA_{L,p}} f = G_t * f = \mathscr{F}^{-1} e^{-t|\xi|^2} \mathscr{F} f \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)\ \forall t \geqslant 0$$

für alle $1 < p < \infty$ gilt, wobei G_t für $t > 0$ der Gauss'sche Kern ist (siehe Blatt 1).
Hinweis: Zeigen Sie für $\lambda \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$, dass $(\lambda - A_{L,p})^{-1} f = (\lambda - A_{L,2})^{-1} f$ und damit auch $e^{tA_{L,p}} f = e^{tA_{L,2}} f$ für alle $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ gilt. Dazu ist Blatt 5, Aufgabe 4 hilfreich. Verwenden Sie anschließend Blatt 1, Aufgabe 2 sowie die Dichtheit von $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$.

Aufgabe 2: (Fourierreihen in $L^2(0,1)$)(4P+2P)
Für eine komplexwertige Funktion $f \in L^1(0,1)$ ist der *Fourierkoeffizient* zu $m \in \mathbb{Z}$ definiert durch

$$\widehat{f}(m) := \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i m\cdot x} dx = \langle f, e^{2\pi i m \cdot x}\rangle_{L^2(0,1)}$$

und die *Fourierreihe* von f durch $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}$. Eine Funktion der Form $P(x) = \sum_{|m|\leqslant N} a_m e^{2\pi i m\cdot x}$ mit $N \in \mathbb{N}$ und $a_m \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \leqslant N$ heißt *trigonometrisches Polynom.*

(a) Zeigen Sie, dass $(\varphi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ mit $\varphi_m(x) = e^{2\pi i m\cdot x}$ eine Orthonormalbasis (ONB) von $L^2(0,1)$ ist. Insbesondere folgt dann $f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m) e^{2\pi i m\cdot x}$ in $L^2(0,1)$ für alle $f \in L^2(0,1)$. Verwenden Sie dazu den Approximationssatz von Weierstraß für trigonometrische Polynome. Dieser besagt, dass jede 1-periodische stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gleichmäßig durch trigonometrische Polynome approximiert werden kann.

(b) Sei $u \in H^k(0,1)$ mit $u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1)$ für $j = 0, \dots, k-1$. Zeigen Sie $\widehat{u^{(k)}}(m) = (2\pi i m)^k \widehat{u}(m)$ für $m \in \mathbb{Z}$. Beachten Sie dazu die Soboleveinbettung $H^k(0,1) \hookrightarrow C^{k-1}[0,1]$.

Zur Erinnerung: In einem Hilbertraum H sind für ein Orthonormalsystem $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset H$ äquivalent: (i) $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine ONB, (ii) $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle f, \varphi_k\rangle_H \varphi_k = f$ in H $\forall f \in H$, (iii) $\|f\|_H^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, \varphi_k\rangle_H|^2$ $\forall f \in H$, (iv) $\forall f \in H:\ \langle f, \varphi_m\rangle_H = 0\ \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$.

Aufgabe 3: (Laplaceoperator in $L^2(0,1)$)(6P)
Zeigen Sie für den Operator

$$A : D(A) \subset L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1), \quad u \longmapsto u''$$

auf $D(A) := \{u \in H^2(0,1) : u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}$, dass $-A$ pseudo-sektoriell mit Spektralwinkel $\varphi_{-A} = 0$ aber nicht sektoriell ist und eine C_0-Halbgruppe mit Wachstumsschranke $\omega(T) = 0$ erzeugt.
Hinweis: Finden Sie mit Hilfe von Aufgabe 2 eine Reihendarstellung für die Resolvente $(\lambda - A)^{-1} f$, $f \in L^2(0,1)$ und zeigen Sie, dass diese Reihe sogar in $H^2(0,1)$ konvergiert.