Übungsblatt 7

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 06.06.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Maximale Regularität)(2P+4P)
Sei $T \in (0,\infty]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ und $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ abgeschlossen. A hat maximale L^p-Regularität auf $[0,T)$, falls für alle $(f,x) \in L^p((0,T),X) \times I_p(A) =: \mathbb{F}$ eine Funktion $u : [0,T) \longrightarrow X$ existiert, die das Cauchy-Problem

$$(\mathrm{CP})_{f,x} \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}u + Au &= f \quad \text{in } (0,T), \\ \qquad u(0) &= x \end{cases}$$

fast überall löst (d.h. u ist für f.a. $t \in (0,T)$ differenzierbar mit $u(t) \in D(A)$ für f.a. $t \in (0,T)$ und $\frac{d}{dt}u + Au = f$ f.ü. in $(0,T)$ sowie $u(0) = x$) und falls es ein $C = C(T) > 0$ gibt, sodass für alle $(f,x) \in \mathbb{F}$ die Ungleichung

$$\|\dot{u}\|_{L^p((0,T),X)} + \|Au\|_{L^p((0,T),X)} \leqslant C\big(\|f\|_{L^p((0,T),X)} + \|x\|_{I_p(A)}\big) \tag{*}$$

erfüllt ist. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Wenn A maximale L^p-Regularität hat und eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt, so gilt für die Lösung u von $(\mathrm{CP})_{f,x}$ zu $(f,x) \in \mathbb{F}$

$$u(t) = e^{-tA}x + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)ds \quad \forall t \in [0,T).$$

(b) Existiert für alle $f \in L^p((0,T),X)$ eine Funktion $u : [0,T) \longrightarrow X$, die $(\mathrm{CP})_{f,0}$ fast überall löst und eine Konstante $C > 0$, sodass Ungleichung (*) mit $x = 0$ erfüllt ist, so hat A bereits maximale Regularität auf $[0,T)$, falls A eine beschränkte holomorphe C_0-Halbgruppe erzeugt.

Hinweis: Betrachten Sie für Aufgabe (*a*) die (fast überall existierende) Ableitung der Funktion $s \mapsto e^{-(t-s)A}u(s)$. Wählen Sie für Aufgabe (*b*) zu $x \in I_p(A)$ ein geeignetes $v \in \mathbb{E}$ mit $v(0) = x$ und betrachten Sie das Problem $(\mathrm{CP})_{f-(\frac{d}{dt}+A)v,0}$.

Aufgabe 2: (Faltung und Fouriertransformation)(2P+2P)
Seien X, Y Banachräume. Für $1 \leqslant p,q,r \leqslant \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(X,Y))$ und $f \in L^q(\mathbb{R}^n, X)$ ist die Faltung definiert durch

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(a) Zeigen Sie $g * f \in L^r(\mathbb{R}^n, Y)$, indem Sie die Banachraum-wertige Version der Young'schen Ungleichung $\|g * f\|_{L^r(\mathbb{R}^n,Y)} \leqslant \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(X,Y))}\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n,X)}$ beweisen.

(b) Zeigen Sie im Fall $p = q = r = 1$, dass $\widehat{g * f} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\hat{g} \cdot \hat{f}$ gilt, wobei $\hat{g} \cdot \hat{f}(x) := \hat{g}(x)\hat{f}(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3: (Vererbung der $\mathcal{R}$-Beschränktheit)(2P+2P+2P)
Seien X, Y, Z Banachräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Sind $\mathcal{T}, \mathcal{S} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, so auch $\mathcal{T} + \mathcal{S}$ mit $\mathcal{R}(\mathcal{T} + \mathcal{S}) \leqslant \mathcal{R}(\mathcal{T}) + \mathcal{R}(\mathcal{S})$.

(b) Sind $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(Y,Z)$ und $\mathcal{S} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, so auch $\mathcal{TS}$ mit $\mathcal{R}(\mathcal{TS}) \leqslant \mathcal{R}(\mathcal{T})\mathcal{R}(\mathcal{S})$.

(c) Ist $\mathcal{T} \subset \mathscr{L}(X,Y)$ $\mathcal{R}$-beschränkt, so auch der Abschluss $\overline{\mathcal{T}}^s$ bezüglich der starken Operatortopologie mit $\mathcal{R}(\overline{\mathcal{T}}^s) \leqslant \mathcal{R}(\mathcal{T})$.