Übungsblatt 8

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 13.06.17

Aufgabe 1: ($\mathcal{R}$-beschränkte Multiplikator-Familien)(3P)
Sei $1 \leqslant p < \infty$ und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zu $\Phi \in L^\infty(G)$ sei $M_\Phi \in \mathscr{L}(L^p(G))$ definiert als

$$M_\Phi u := \Phi \cdot u, \quad u \in L^p(G).$$

Zeigen Sie, dass die Familie $\{M_\Phi : \Phi \in L^\infty(G), \|\Phi\|_{L^\infty(G)} \leqslant K\} \subset \mathscr{L}(L^p(G))$ für jedes $K > 0$ $\mathcal{R}$-beschränkt ist mit

$$\mathcal{R}\{M_\Phi : \Phi \in L^\infty(G), \|\Phi\|_{L^\infty(G)} \leqslant K\} \leqslant 2K.$$

Aufgabe 2: (Eigenschaft (α) für L^p-Räume)(3P)
Sei X ein komplexer Banachraum und $G \subset \mathbb{R}^n$ offen. Zeigen Sie: Hat X Eigenschaft (α) mit der Konstanten $\alpha_X \geqslant 1$, so hat auch $L^p(G, X)$ für jedes $1 \leqslant p < \infty$ Eigenschaft (α) mit der gleichen Konstanten $\alpha_{L^p(G,X)} = \alpha_X$.

Aufgabe 3: (4P)
Für $T \in (0, \infty]$, $1 \leqslant p < \infty$, einen Banachraum X und einen abgeschlossenen und dicht definierten Operator $A : D(A) \subset X \to X$ ist $\mathbb{E}_T := W^{1,p}((0,T), X) \cap L^p((0,T), D(A))$. Zeigen Sie die Einbettung

$$\mathbb{E}_\infty \hookrightarrow BUC((0,\infty), I_p(A)).$$

Aufgabe 4: (Schauderzerlegung von Hilberträumen)(3P)
Sei $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum H. Zeigen Sie, dass durch $\Delta_k := \langle \cdot, e_k \rangle e_k$ eine unbedingte Schauderzerlegung $(\Delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H gegeben ist und geben Sie die Unbedingtheitskonstante an.