Übungsblatt 9

Partielle Differentialgleichungen II, SoSe 2017

Prof. Dr. Jürgen Saal, Pascal Hobus

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Abgabe: 20.06.17 in der Übung

Aufgabe 1: (Soboleveinbettung)(2P+2P)
Sei X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für $T \in (0,\infty)$ gilt $W^{1,p}((0,T),X) \hookrightarrow C([0,T],X) = BUC([0,T],X)$.

(b) $W^{1,1}((0,\infty),X) \hookrightarrow BUC([0,\infty),X)$.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst eine Abschätzung der Form $\|u(0)\|_X \leqslant C_T \|u\|_{W^{1,p}((0,T),X)}$ für Funktionen $u \in C^\infty([0,T],X)$, indem Sie die Darstellung $u(0) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Big(u(t) + \int\limits_0^t u'(s)ds\Big)dt$ verwenden.

Aufgabe 2: (Spuroperator)(2P+2P)
Zeigen Sie für einen Banachraum X und $1 \leqslant p < \infty$ die folgenden Aussagen.

(a) Für jedes $T \in (0,\infty]$ existiert der Spuroperator auf $W^{1,p}(J,X)$ mit $J := (0,T)$, d.h. der dicht definierte Operator

$$\mathrm{Tr} : C_c^\infty(\bar{J},X) \subset W^{1,p}(J,X) \longrightarrow X, \quad u \longmapsto u(0)$$

besitzt eine stetige Fortsetzung $\mathrm{Tr} : W^{1,p}(J,X) \longrightarrow X$.

(b) Für $T \in (0,\infty]$ und $u \in W^{1,p}((0,T),X)$ gilt die Darstellung

$$u(t) = \int\limits_0^t u'(s)ds + \mathrm{Tr}\,u \qquad \text{für f.a. } t \in (0,T).$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $T < \infty$ und beachten Sie, dass in diesem Fall $C_c^\infty(\bar{J},X) = C^\infty(\bar{J},X)$ gilt.

Aufgabe 3: (Raum der Fouriermultiplikatoren)(5P)
Für zwei komplexe Banachräume X, Y und $1 \leqslant p < \infty$ ist der Raum der Fouriermultiplikatoren definiert durch

$$M_p(\mathbb{R}^n,X,Y) = \Big\{ m : \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(X,Y) \mid m\cdot\phi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n,Y) \cap \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n,Y)\ \forall \phi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n,Y),$$
$$\mathscr{F}^{-1}m\mathscr{F} \in \mathscr{L}(L^p(\mathbb{R}^n,X),L^p(\mathbb{R}^n,Y)) \Big\}.$$

Weiterhin ist $M_p(\mathbb{R}^n) = M_p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C},\mathbb{C})$. Zeigen Sie für $1 < p < \infty$

$$M_p(\mathbb{R}^n,X,Y) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(X,Y)).$$

Hinweis: Beweisen Sie die Aussage zunächst für den Fall $X = Y = \mathbb{C}$, indem Sie für $1 < p < \infty$ die Implikationskette

$$m \in M_p(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ m \in M_p(\mathbb{R}^n) \cap M_{p'}(\mathbb{R}^n) \text{ für } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \ \Rightarrow\ m \in M_2(\mathbb{R}^n) \ \Rightarrow\ m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$$

zeigen. Dabei folgt die zweite der drei Implikationen aus dem Satz von Riesz-Thorin. Verwenden Sie anschließend für $m \in M_p(\mathbb{R}^n,X,Y)$ die Darstellung

$$\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n,\mathscr{L}(X,Y))} = \operatorname*{ess-sup}_{\xi\in\mathbb{R}^n} \sup_{x\in X,\|x\|_X\leqslant 1} \sup_{y'\in Y',\|y'\|_{Y'}\leqslant 1} \Big|\langle m(\xi)x|y'\rangle\Big|$$

um die Aussage auf den skalaren Fall zurückzuführen.