Übungsblatt 12

Hinweis: Es werden nur die ersten beiden Aufgaben korrigiert und bewertet.

[K] Aufgabe 12.1 (4 Punkte)

Sei X ein Banachraum, $T \in (0, \infty)$ und ${}_0W^{1,p}((0,T), X) := \{u \in W^{1,p}((0,T), X) \mid u(0) = 0\}$. Für eine Funktion $u : [0,T] \to X$ definieren wir

$$E_T u(t) := \begin{cases} 0, & 2T \leqslant t < \infty, \\ u(t), & 0 \leqslant t < T, \\ u(2T - t), & T \leqslant t < 2T. \end{cases}$$

Zeigen Sie für $1 \leqslant p < \infty$, dass sowohl

$$E_T : L^p((0,T), X) \to L^p(\mathbb{R}_+, X)$$

als auch

$$E_T : {}_0W^{1,p}((0,T), X) \to {}_0W^{1,p}(\mathbb{R}_+, X)$$

ein Fortsetzungsoperator (d.h. ein stetiger linearer Operator mit $E_T u|_{(0,T)} = u$) ist. Zeigen Sie außerdem, dass

$$\|E_T\|_{\mathscr{L}(L^p((0,T),X),L^p(\mathbb{R}_+,X))} \leqslant 2 \text{ und } \|E_T\|_{\mathscr{L}(W^{1,p}((0,T),X),W^{1,p}(\mathbb{R}_+,X))} \leqslant 2.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $C^\infty([0,T], X)$ dicht in $W^{1,p}((0,T), X)$ liegt.

[K] Aufgabe 12.2 (4 Punkte)

Sei $1 < p < \infty$ und $A_L : D(A_L) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ mit $u \mapsto \Delta u$ für $D(A_L) = W^{2,p}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass für $u_0 \in I_p(A_L)$ die Lösung $u := \exp(tA_L)u_0 \in \mathbb{E}_\infty$ der Wärmeleitungsgleichung

$$(WLG) \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & t \in (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

reell analytisch für $p > p_0(n) > 1$ ist, dass also $u \in C^\omega((0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gilt.
Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung

$$u(t,x) = (G_t * u_0)(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy$$

und versuchen Sie, die reelle Analytizität in die Ortsrichtungen zu zeigen, indem Sie x_j für $j = 1, .., n$ als komplexe Variable auffassen und Resultate über Holomorphie aus der Funktionentheorie anwenden. Sie dürfen $p_0(n) > 1$ von $n \in \mathbb{N}$ abhängig so groß wählen, dass Sie Sobolev-Einbettungen nutzen können.

Aufgabe 12.3

Sei X ein Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$. Zeigen Sie:

(a) Für $T_0 \in (0, \infty)$ gilt die Soboleveinbettung

$$ {}_0W^{1,p}((0,T),X) \hookrightarrow C([0,T],X) $$

gleichmäßig in $T \in (0, T_0/2)$, d.h. es gibt ein $C > 0$, sodass

$$ \|u\|_{C([0,T],X)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}((0,T)X)} $$

für alle $u \in {}_0W^{1,p}((0,T),X)$ und für alle $T \in (0, T_0/2)$.
Hinweis: Verwenden Sie den Erweiterungsoperator aus Lemma 11.16.

(b) Für $T \in (0, \infty)$ gilt die Poincaré-Ungleichung

$$ \|u\|_{L^p((0,T),X)} \leqslant T\|\dot{u}\|_{L^p((0,T),X)} $$

für alle $u \in {}_0W^{1,p}((0,T),X)$.

Abgabe bis zum Freitag, den 09. Juli 2021, 11.00 Uhr über das Ilias-System.