Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 1

Abgabe der Lösungen am 25.10.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgabe 1.1 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu der Aufgabe 1.2 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 1.1

Welche der folgenden Gruppen sind noethersch, polyzyklisch bzw. virtuell abelsch?

- die symmetrische Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ für $n \in \mathbb{N}$,
- die unendliche Diedergruppe D_∞,
- die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$,
- die Gruppe $\{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{N} : z^n = 1\}$ aller komplexen Einheitswurzeln,
- die Gruppe $\mathrm{AGL}_1(\mathbb{Q})$ aller invertierbaren affinen linearen Transformationen
$$T_{a,b}\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto ax + b \qquad (a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a \neq 0),$$
- die Gruppe $M \ltimes A$, wobei $M = \langle -1, 1 + \sqrt{2} \rangle \leq \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ ist, $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ als additive Gruppe betrachtet wird, und die Konjugation von M auf A durch Multiplikation in dem Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ erklärt ist: $a^x = a \cdot x$ für $a \in A$ und $x \in M$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 1.2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß eine abelsche Gruppe genau dann polyzyklisch ist, wenn sie endlich erzeugt ist.

(b) Eine Gruppe G heißt *metabelsch*, falls es ein $N \trianglelefteq G$ gibt dergestalt, daß sowohl N als auch G/N abelsch sind. Geben Sie eine endlich erzeugte metabelsche Gruppe an, die nicht polyzyklisch ist.