Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 2

Abgabe der Lösungen ausnahmsweise am 31.10.2016 bei Herrn Kuckuck

Bitte bereiten Sie Aufgabe 2.1 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu der Aufgabe 2.2 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 2.1

(1) Für welche $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist die Diedergruppe D_{2n} nilpotent und welche Nilpotenzklasse hat die Gruppe D_{2n} gegebenenfalls?

(2) Sei G eine Gruppe und p eine Primzahl. Sei $P \trianglelefteq G$ eine normale p-Untergruppe. Zeigen Sie (bitte ohne Verwendung des Zornschen Lemmas): P ist in einer (bzgl. Inklusion) maximalen normalen p-Untergruppe von G enthalten.

(3) Ist jede auflösbare Untergruppe H einer Gruppe G stets in einer (bzgl. Inklusion) maximalen auflösbaren Untergruppe von G enthalten?

Aufgabe 2.2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe und $1 \neq N \trianglelefteq G$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Ist G nilpotent, so gilt $N \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$.

(b) Ist G auflösbar, so existiert ein abelscher Normalteiler $A \trianglelefteq G$ mit $1 \neq A \leq N$.

(c) Ist G nilpotent und N maximal bzgl. Inklusion unter allen abelschen Normalteilern von G, so folgt $\mathrm{C}_G(N) = N$.

(d) Ist G nilpotent, so ist jede Untergruppe $H \leq G$ subnormal in G: Es exisitiert jeweils eine endliche Kette $H = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq H_k = G$.

Zusatz.[1] Finden Sie für jede Aussage ein geeignetes Beispiel, das illustriert, daß auf die jeweilige Voraussetzung an G, nilpotent bzw. auflösbar zu sein, im allgemeinen nicht verzichtet werden kann.

[1] nicht zum Erreichen der Punkte relevant