Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 3

Abgabe der Lösungen am 08.11.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgabe 3.1 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösungen zu der Aufgabe 3.2 ab; weitere Informationen auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 3.1

Sei $V = Rv_1 \oplus \ldots \oplus Rv_n$ ein freier Modul vom Rang $n \in \mathbb{N}$ über einem kommutativen Ring R mit 1. Sei $E = \mathrm{End}_R(V) \cong \mathrm{Mat}_n(R)$. Für $0 \le i \le n$ setze $V_i = Rv_{n-i+1} \oplus \ldots \oplus Rv_n$, und

$$S = \{\alpha \in E \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : V_i\alpha \subseteq V_{i-1}\}.$$

Zeigen Sie für die nilpotente Gruppe $G = 1 + S$, ergänzend zu den in der Vorlesung bewiesenen Aussagen:

(a) Für $1 \le j \le n$ ist $S^j = \{\alpha \in E \mid \forall i \in \{j, \ldots, n\} : V_i\alpha \subseteq V_{i-j}\}$.

(b) Für $1 \le j \le n$ ist $G_j = 1 + S^j$ gleich $\zeta_{n-j}G$.

(c) Die Nilpotenzklasse von G ist gleich $n - 1$.

Hinweis. Nutzen Sie den Isomorphismus $G \cong \mathrm{Tr}_1(n, R)$ zwischen G und der Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen 1 auf der Diagonalen.

Aufgabe 3.2 (4 Punkte)

Sei G eine nilpotente Gruppe und $H \le G$ mit $G = G'H$. Beweisen Sie: $G = H$.

Finden Sie ein geeignetes Beispiel, das illustriert, daß für auflösbare Gruppen G die entsprechende Aussage im allgemeinen nicht richtig ist.