Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2016–17

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Spezielle Themen: Polyzyklische Gruppen – Blatt 4

Abgabe der Lösungen am 15.11.2016 in der Vorlesung

Bitte bereiten Sie Aufgabe 4.1 für die Übungsstunde vor und geben Sie eine schriftliche Lösung zu Aufgabe 4.2 ab; weitere Informationen auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/PolyzyklischeGruppen_WS1617/`

Aufgabe 4.1

Begründen Sie genau: Ist H eine Gruppe und $Z_i := \zeta_i H$ für $i \in \mathbb{N}_0$, so ist Z_{i+1}/Z_i isomorph zu einer Untergruppe von $\mathrm{Hom}(H/H', Z_i/Z_{i-1})$, für alle $i \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte)

Sei G eine Gruppe, $A \trianglelefteq G$ ein abelscher Normalteiler und $H \leq G$ ein *Komplement* von A in G, d.h. $HA = G$ und $H \cap A = 1$.[1]

(i) Zeigen Sie: Ist $K \leq G$ ein beliebiges weiteres Komplement von A in G, so kann man jedes $h \in H$ eindeutig in der Form $h = k_h a_h$ mit $k_h \in K$ und $a_h \in A$ schreiben und die Zuordnung
$$\delta_K \colon H \to A,\ h \mapsto a_h^{-1}$$
definiert eine Derivation von H nach A (wobei H auf A durch Konjugation operiert).

(ii) Zeigen Sie: Die Zuordnung $K \mapsto \delta_K$ vermittelt eine Bijektion zwischen der Menge der Komplemente von A in G und der Menge $\mathrm{Der}(H, A)$ der Derivationen von H nach A.

(iii) Für $c \in A$, definiere
$$\delta_c \colon H \to A,\ h \mapsto [h, c].$$
Zeigen Sie, dass δ_c für jedes $c \in A$ eine Derivation ist, und dass die Menge
$$\mathrm{Inn}(H, A) := \{\delta_c \mid c \in A\} \subseteq \mathrm{Der}(H, A)$$
eine Untergruppe von $\mathrm{Der}(H, A)$ ist.[2]

Zusatz: Zeigen Sie, dass die in (ii) betrachtete Zuordnung $K \mapsto \delta_K$ eine Bijektion zwischen der Menge der Konjugationsklassen von Komplementen von A in G und der Gruppe $\mathrm{Der}(H, A)/\mathrm{Inn}(H, A)$ induziert.

[1] G ist also ein semidirektes Produkt von H und A.

[2] Hierbei ist die Verknüpfung auf $\mathrm{Der}(H, A)$ die punktweise Addition: $h(\delta_1 + \delta_2) = (h\delta_1)(h\delta_2)$ für $\delta_1, \delta_2 \in \mathrm{Der}(H, A)$ und $h \in H$.